



# 等几何分析法在固体力学中的一些应用

余天堂

河海大学工程力学研究所

**Email: [tiantangyu@hhu.edu.cn](mailto:tiantangyu@hhu.edu.cn)**

**Homepage: <http://www.idmes.cn/>**

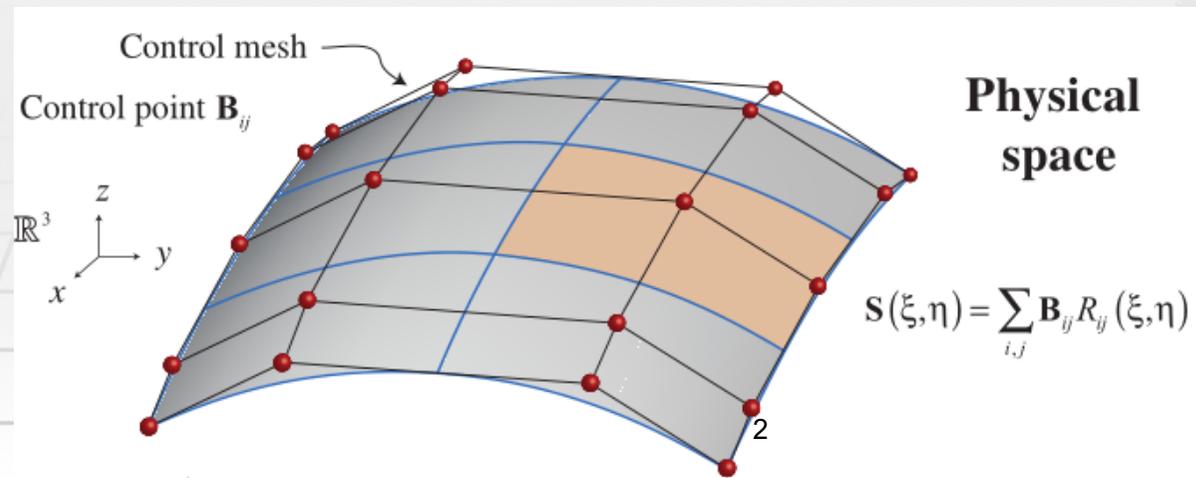
# 等几何分析

基本思想:

- 2005年, T.J.R. Hughes
- 等参元思想
- CAD样条基函数→FEA中的形函数;
- 样条的控制节点→计算网格节点,
- 使CAD与CAE统一

优点:

- 几何精确、高阶连续、精度高、鲁棒性好、无需传统的网格划分等
- 几何精确、高阶连续性对分析板壳结构有独到的优势



等几何分析(IGA)已成功用于固体力学、接触力学、流体力学、电磁学、及生物力学等领域，并展现出其相对有限元法很大的优势。本讲座的内容包括：

(1)本质边界条件的施加；

(2)板壳结构的力学性能(包括板、微型板、含缺陷板的静力弯曲、自振特性和屈曲稳定)；

(3)三维弹塑性大变形问题；

(4)热传导问题和结构形状优化(等几何边界元法)；

(5)带孔结构形状优化(扩展等几何分析)；

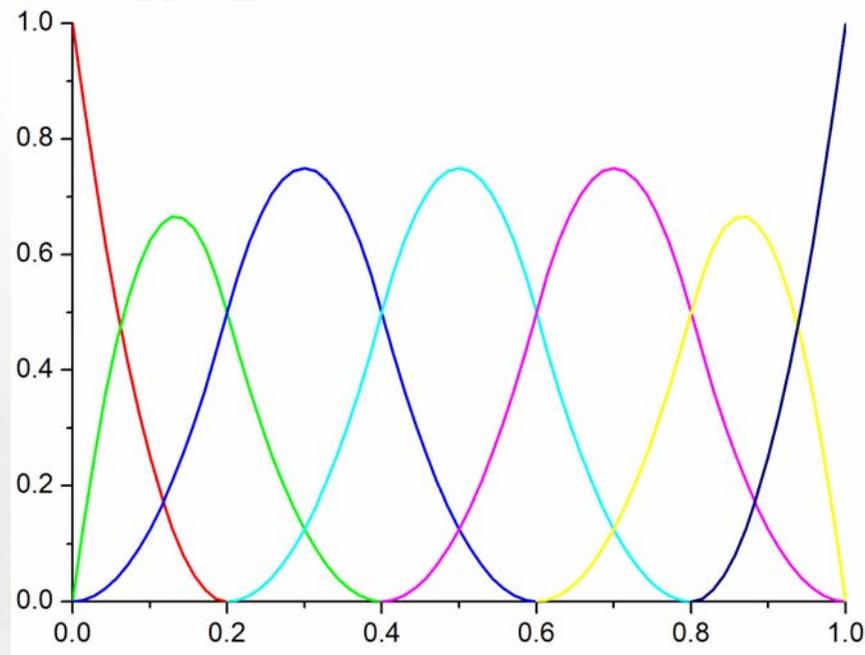
(6)弹性体的自适应分析。

# 1.等几何分析本质边界条件的施加

样条基函数，如**NURBS**，不具有插值性

例如：

$$k(\xi) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_9, \xi_{10}\}^T = \{0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1\}^T$$



在开式节点矢量中，基函数仅在端点具有插值性  
直接添加本质边界条件将降低求解精度及收敛率

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad \Gamma_u$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{c=1}^{NC} \left( \sum_{b=1}^{NB} R_b(\xi_c) \mathbf{u}_b - \mathbf{g}(\mathbf{x}_c) \right)^2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_A \quad \mathbf{u}_B]^T$$

修正的最小二乘配点法

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} \left( \sum_{b=1}^{NB} R_b(\xi) \mathbf{u}_b - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right)^2 d\Gamma$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{A \times A} & \mathbf{K}_{A \times B} & \cancel{\mathbf{C}_A^T} \\ \mathbf{K}_{B \times A} & \mathbf{K}_{B \times B} & \mathbf{C}_B^T \\ \cancel{\mathbf{C}_A} & \mathbf{C}_B & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}$$

减缩拉格朗日乘子法

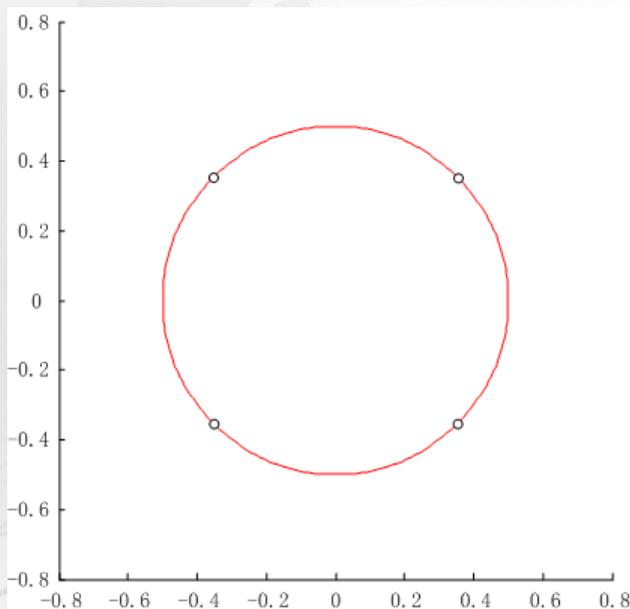
修正的最小二乘配点法克服了最小二乘配点法配点位置及数目的选择问题，且减少了计算量。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_B \mathbf{u}_B &= \mathbf{q} \\ \mathbf{K}_{A \times A} \mathbf{u}_A &= \mathbf{F}_A - \mathbf{K}_{A \times B} \mathbf{u}_B \end{aligned}$$

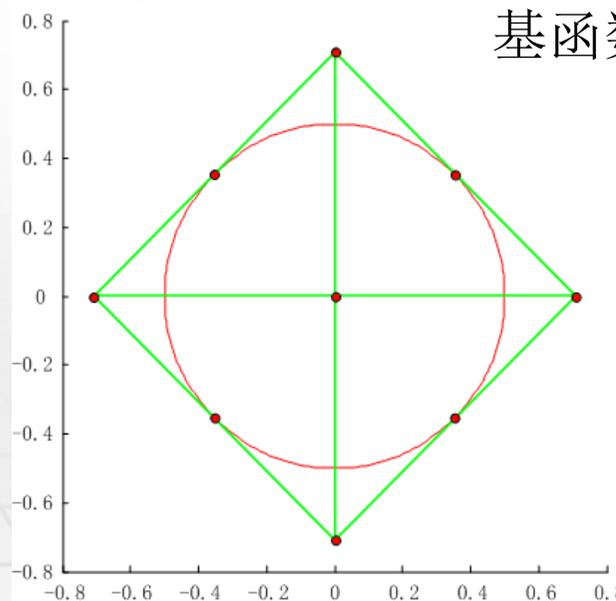
减缩的拉格朗日乘子法克服了拉格朗日乘子法条件数差、自由度增加等缺点。

# 算例1: 圆形域上的Poisson问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{cases}$$

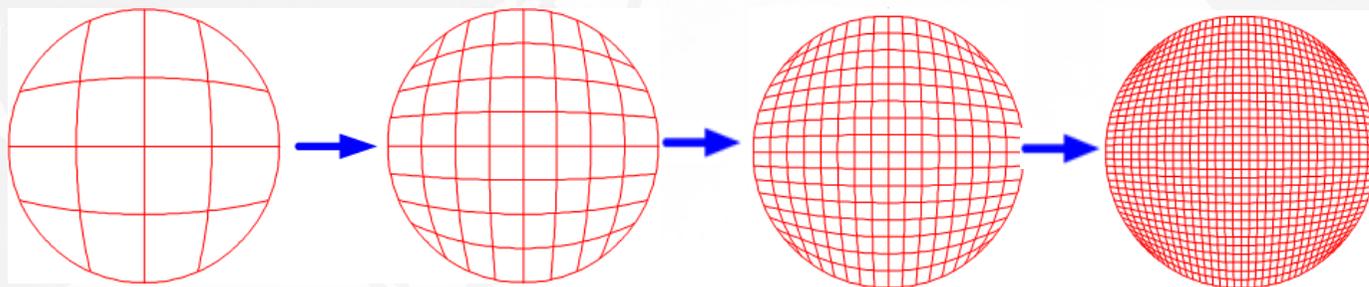


(a) 物理网格

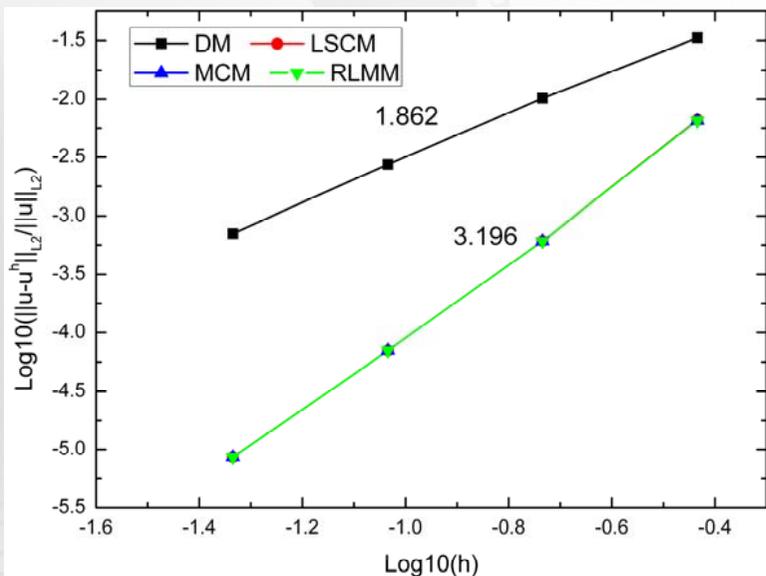


基函数阶次  $p=q=2$

(b) 控制网格



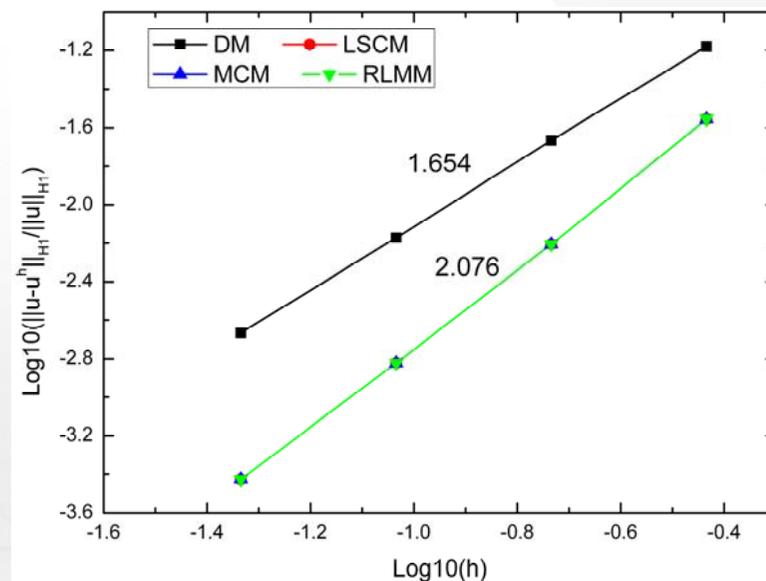
圆形域网格 $h$ 细分过程



不同方法的 $L2$ 范数误差结果比较

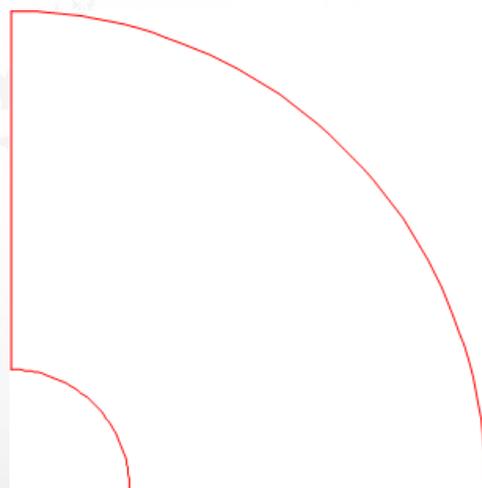
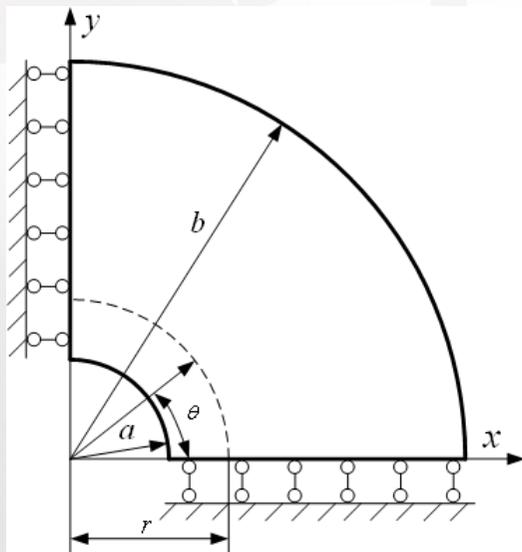
(DM: 直接添加法; LSCM: 最小二乘配点法; MCM: 修正的最小二乘配点法; RLMM: 减缩拉格朗日乘法)

**MCM和RLMM计算方法比直接添加法精度高且能获得最佳收敛率**

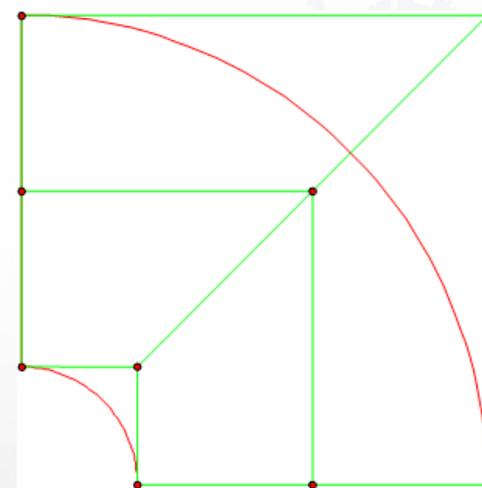


不同方法的 $H1$ 范数误差结果比较

## 算例2：无限大圆孔板问题

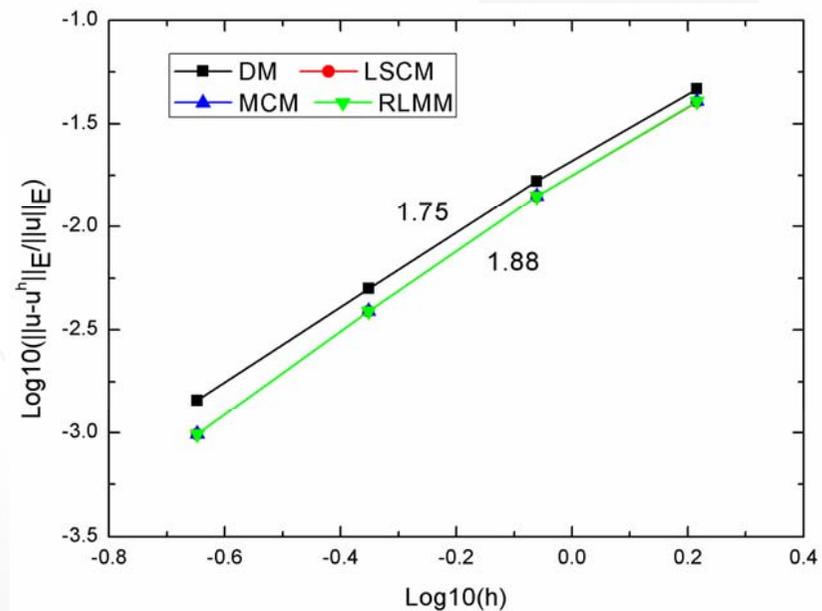
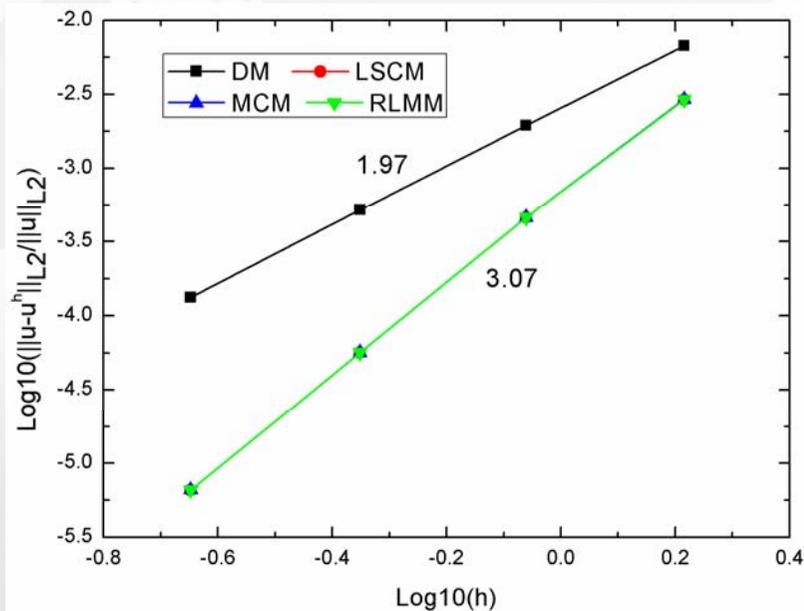


(a) 物理网格



(b) 控制网格

基函数阶次  $p=q=2$



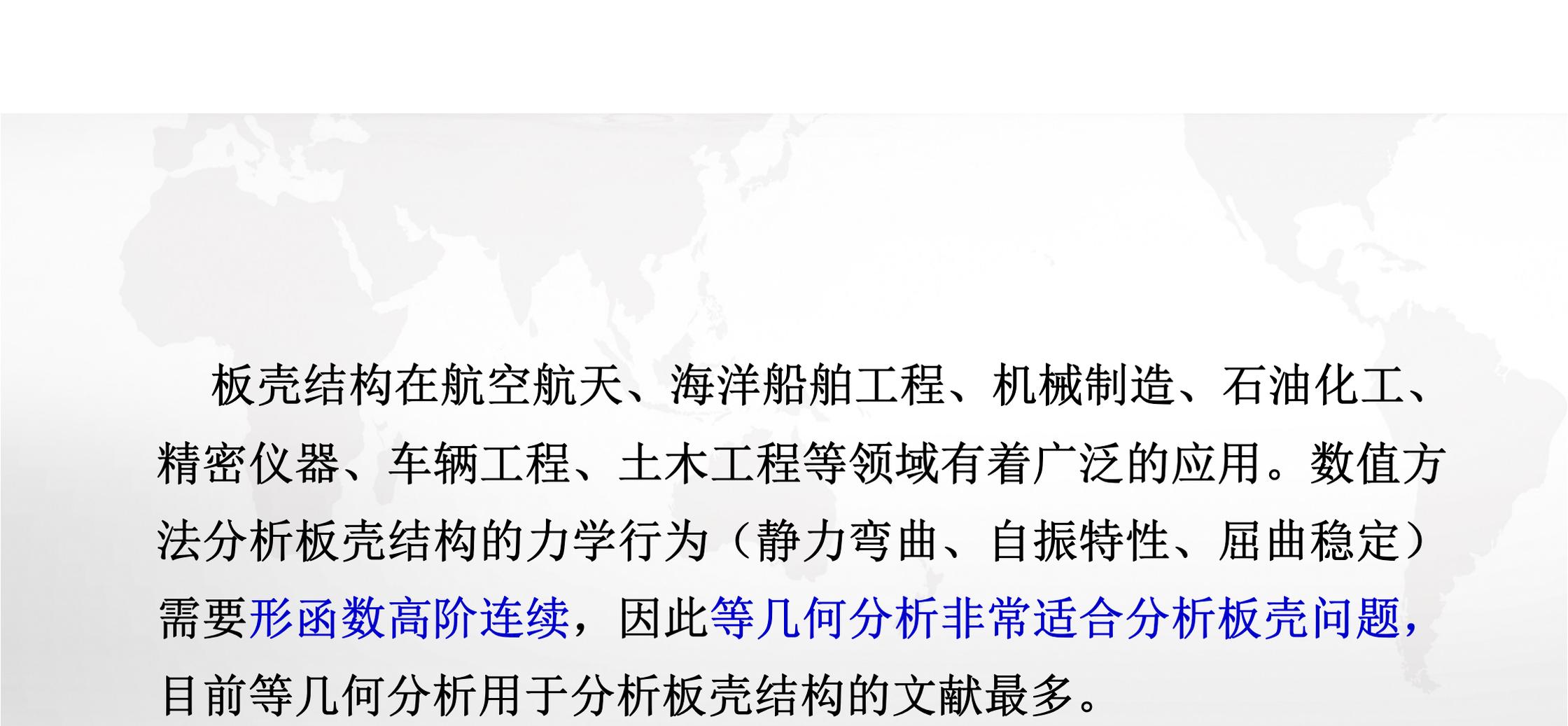
**MCM和RLMM能获得比直接添加本质边界条件法更高的精度且能获得最佳收敛率**

两种方法求解精度高，能获得最佳收敛率，且求解效果一样，可以任选一种使用。

**尹硕辉，面向CAD/CAE集成的等几何分析和有限单元法研究及应用[D]，河海大学，2016**

A faint, light gray world map is visible in the background, centered behind the title box. The map shows the outlines of continents and oceans.

## 2.等几何分析在板壳中的应用



板壳结构在航空航天、海洋船舶工程、机械制造、石油化工、精密仪器、车辆工程、土木工程等领域有着广泛的应用。数值方法分析板壳结构的力学行为（静力弯曲、自振特性、屈曲稳定）需要形函数高阶连续，因此等几何分析非常适合分析板壳问题，目前等几何分析用于分析板壳结构的文献最多。

## 薄板壳问题的等几何分析

- **Kirchhoff-Love理论/经典板壳理论:**

- 适应于薄板壳结构( $R/t \geq 20$ );

- 基函数 $C^1$ 连续。

位移:

$$\begin{array}{l} u_0 = -z\theta_x \\ v_0 = -z\theta_y \\ w_0 = w \end{array} \quad \begin{array}{l} \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \end{array}$$

有限元法: 采用非协调元(复杂, 自由度多)

等几何分析: 样条基函数高阶连续, 可以直接求导获得转角; 使薄板壳分析更加简单, 且自由度少(无转动自由度)。

挠度近似表达式:

$$w(\mathbf{x}(\xi)) = \sum_{I=1}^{NP} R_I(\xi) w_I$$

基本方程

虚功方程

$$\begin{array}{l} \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{F} \\ (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{w} = 0 \\ (\mathbf{K} + \lambda_{cr} \mathbf{K}_g)\mathbf{w} = 0 \end{array}$$

## 薄板壳问题的等几何分析

传统有限元法很难精确表示薄壳结构，也不能满足Kirchhoff-Love薄壳理论的高阶连续性要求。

### Kirchhoff-Love薄壳

壳几何中面:

$$\boldsymbol{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi_1, \xi_2) \mathbf{P}^i$$

壳位移近似:

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}^i$$

基本方程



虚功方程

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$$

优点: 采用NURBS只需少量的控制节点就能精确地描述复杂曲面，且能满足Kirchhoff-Love理论的单元之间 $C^1$ 连续性要求。

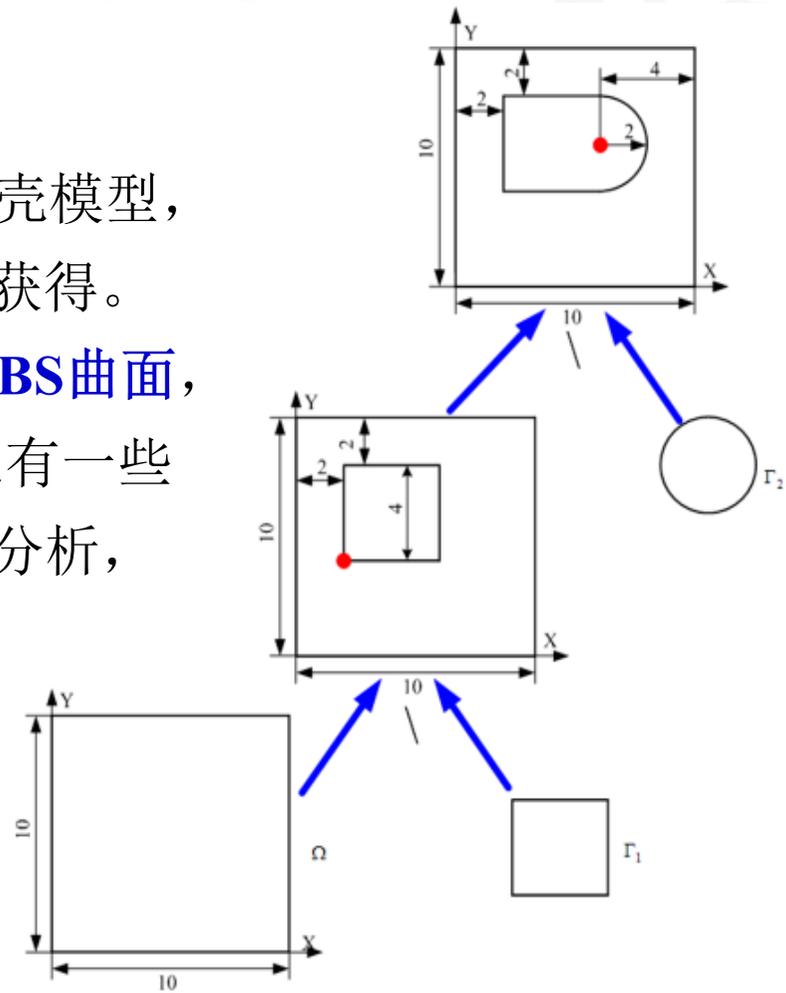
# 薄板壳问题的等几何分析

## 裁剪曲面

在CAD建模中，复杂几何模型，如含切口的板壳模型，通常采用一系列布尔运算如并、交及减等裁剪获得。采用这种方式建立模型最终生成的是**裁剪NURBS曲面**，如右图所示。目前对裁剪的NURBS曲面分析已有一些研究，根据**裁剪曲面构造裁剪单元**用于等几何分析，这种方法**效率较低、有局限性**。

采用**XFEM模拟孔洞的思想**

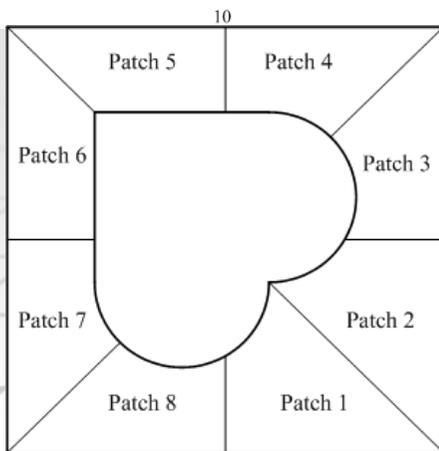
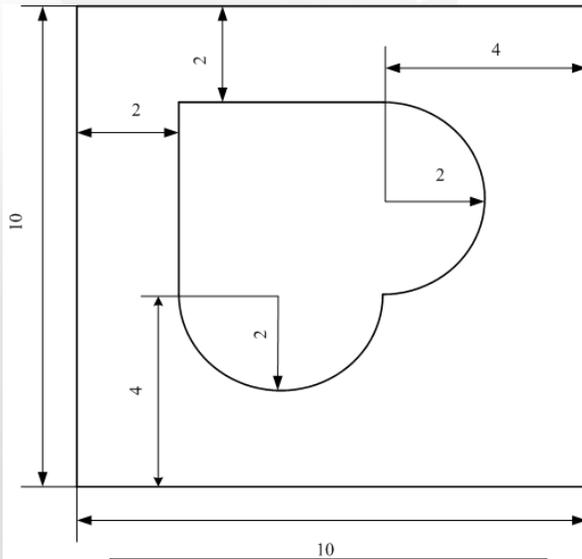
采用**水平集表示裁剪过程**



# 薄板壳问题的等几何分析

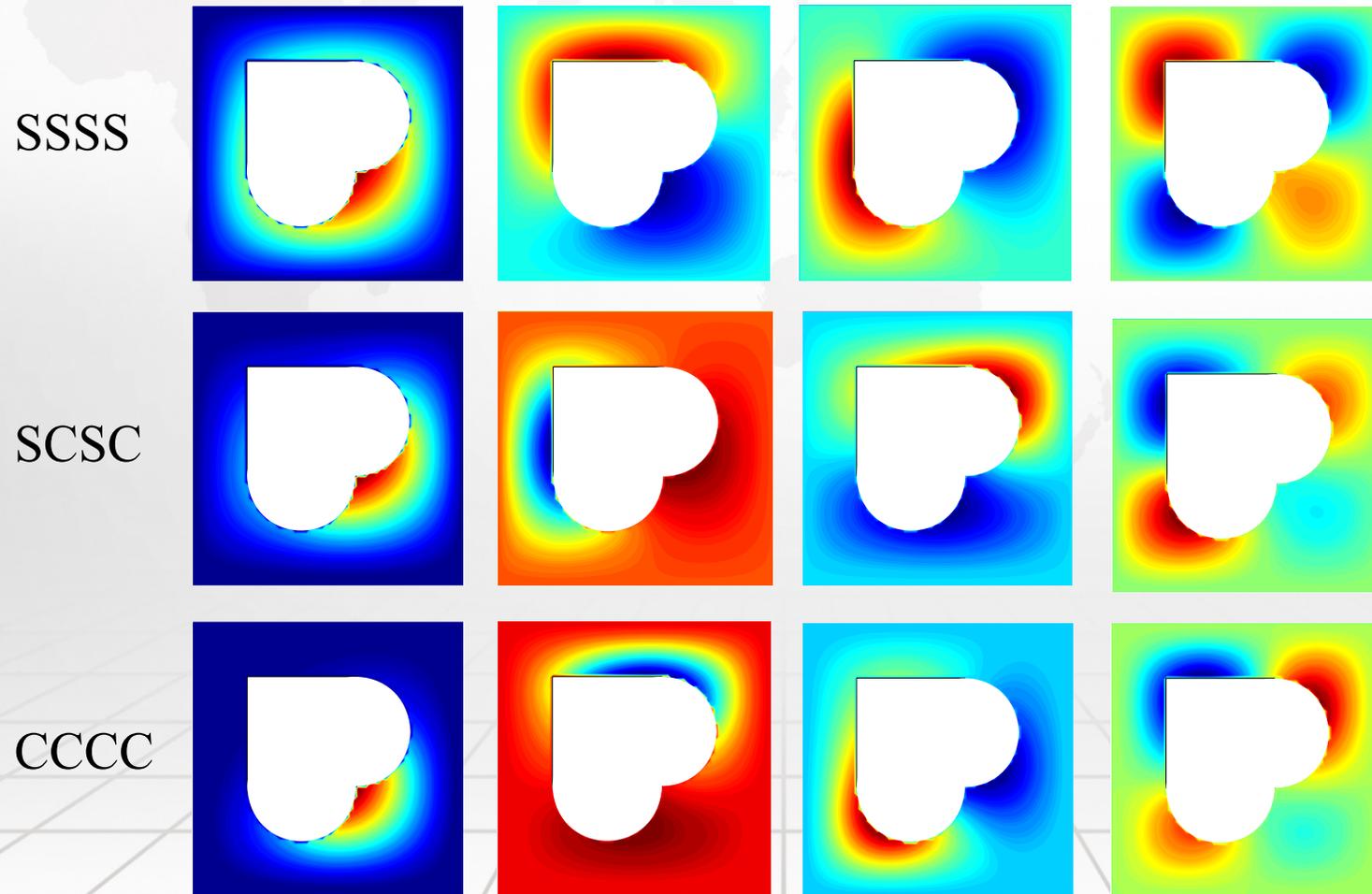
算例：Laminate 板自由振动（材料层次为三层）

四边简支条件下不同铺层方向归一化频率计算结果



| 倾角                                | 方法                      | 阶次     |        |        |        |
|-----------------------------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|
|                                   |                         | 1      | 2      | 3      | 4      |
| $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$     | 本文方法                    | 18.192 | 30.936 | 36.082 | 56.420 |
|                                   | Shojaee <sup>[91]</sup> | 18.194 | 30.932 | 35.678 | 55.383 |
|                                   | Bui <sup>[166]</sup>    | 18.226 | 31.127 | 36.237 | 56.874 |
|                                   | Bui <sup>[166]</sup>    | 18.169 | 30.303 | 36.581 | 57.429 |
| $(15^\circ, -15^\circ, 15^\circ)$ | 本文方法                    | 19.100 | 32.149 | 36.458 | 57.573 |
|                                   | Shojaee <sup>[91]</sup> | 18.912 | 32.045 | 36.004 | 56.345 |
|                                   | Bui <sup>[166]</sup>    | 19.177 | 32.445 | 37.238 | 58.716 |
|                                   | Bui <sup>[166]</sup>    | 18.323 | 31.472 | 37.617 | 63.077 |
| $(30^\circ, -30^\circ, 30^\circ)$ | 本文方法                    | 20.606 | 33.997 | 37.610 | 59.797 |
|                                   | Shojaee <sup>[91]</sup> | 20.316 | 33.933 | 37.074 | 58.484 |
|                                   | Bui <sup>[166]</sup>    | 20.926 | 34.915 | 39.101 | 62.222 |
|                                   | Bui <sup>[166]</sup>    | 20.310 | 33.987 | 39.898 | 58.111 |
| $(45^\circ, -45^\circ, 45^\circ)$ | 本文方法                    | 21.313 | 34.801 | 38.289 | 60.897 |
|                                   | Shojaee <sup>[91]</sup> | 20.982 | 34.848 | 37.559 | 59.325 |
|                                   | Bui <sup>[166]</sup>    | 21.736 | 36.079 | 39.975 | 63.897 |
|                                   | Bui <sup>[166]</sup>    | 20.987 | 34.897 | 39.269 | 63.375 |
| $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$    | 本文方法                    | 18.201 | 31.082 | 36.096 | 56.473 |
|                                   | Shojaee <sup>[91]</sup> | 18.190 | 31.087 | 35.655 | 55.452 |
|                                   | Bui <sup>[166]</sup>    | 18.278 | 32.264 | 36.134 | 57.151 |
|                                   | Bui <sup>[166]</sup>    | 18.027 | 32.506 | 37.268 | 57.698 |

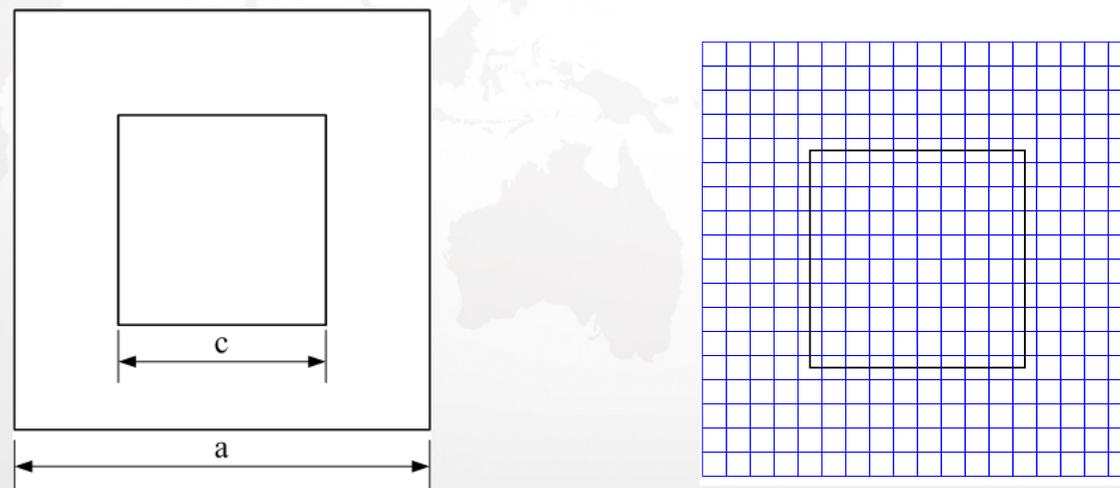
# 薄板壳问题的等几何分析



前四阶振型图

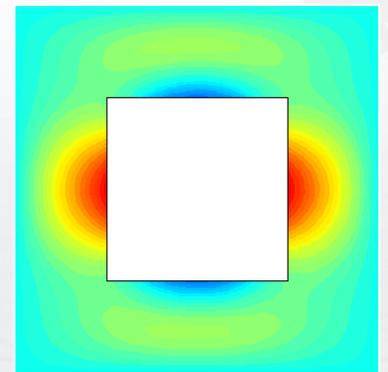
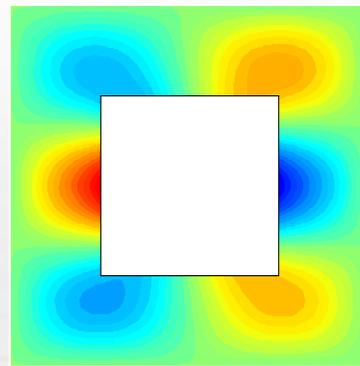
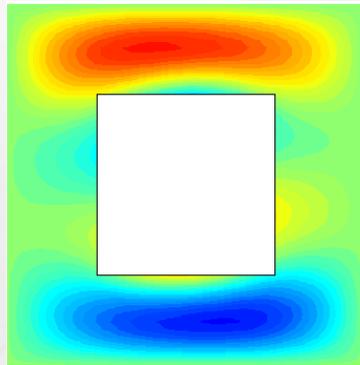
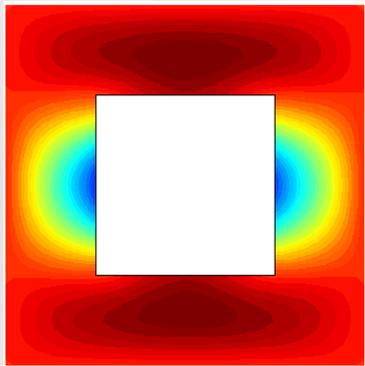
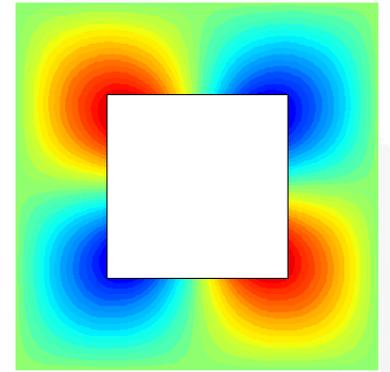
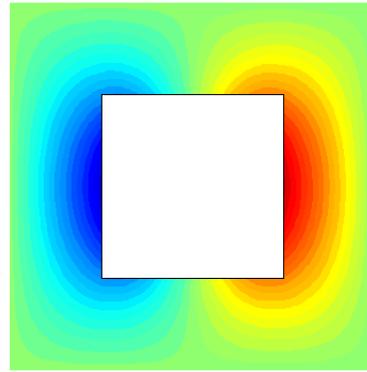
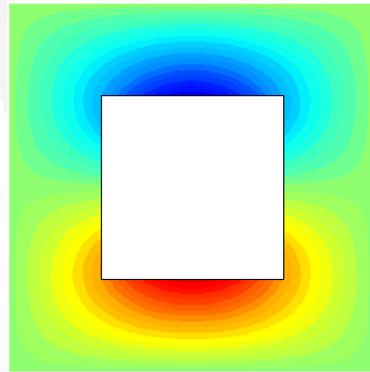
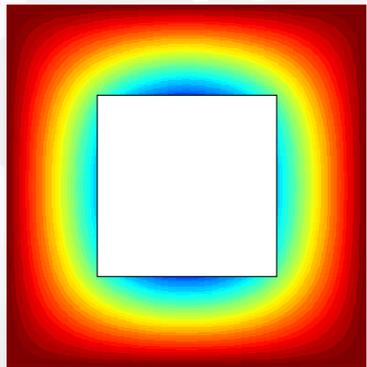
# 薄板壳问题的等几何分析

算例：laminate板屈曲分析



临界屈曲荷载系数计算结果

| 系数  | 控制节点数  |        |       |        |        | Ovesy <sup>[167]</sup> | Cheung <sup>[168]</sup> | Tham <sup>[169]</sup> |
|-----|--------|--------|-------|--------|--------|------------------------|-------------------------|-----------------------|
|     | 9×9    | 16×16  | 21×21 | 28×28  | 33×33  |                        |                         |                       |
| $k$ | 2.0606 | 2.0177 | 1.999 | 1.9924 | 1.9886 | 1.9837                 | 2.000                   | 2.090                 |



前八阶屈曲模态图

# 薄板壳问题的等几何分析

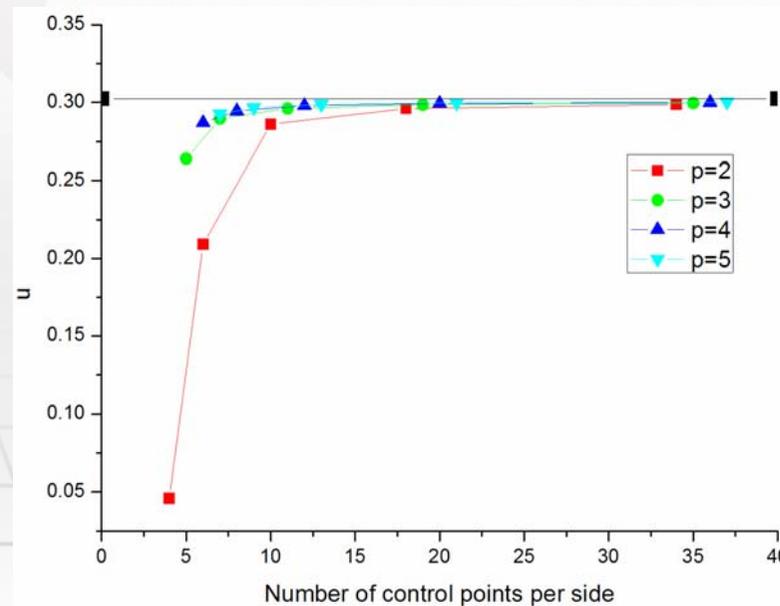
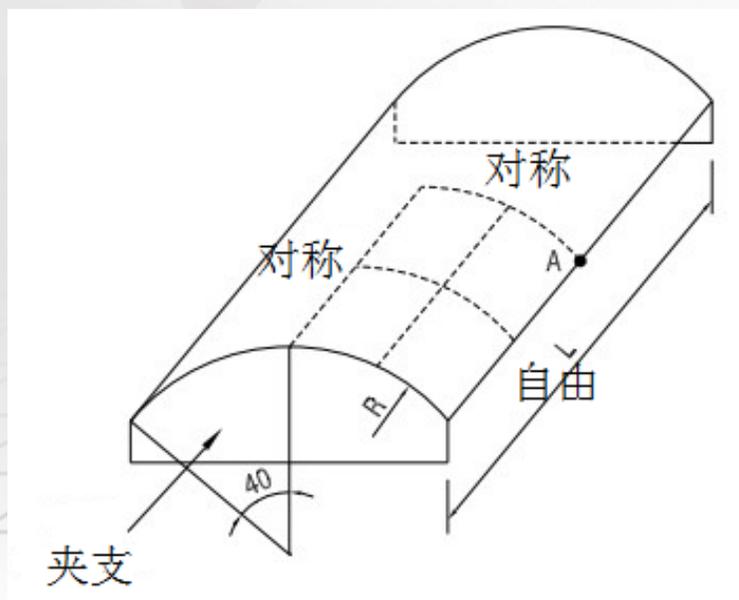
算例：Scordelis–Lo Roof薄壳结构

几何： $R=25$ 、 $L=50$ 、 $h=0.25$ ；

材料参数： $E=4.32 \times 10^8$ 、泊松比 $\nu=0$ 。

均匀自重作用下，边界中点A横向位移解析解为0.3024

随着网格加密，计算结果收敛于解析解；阶次越高精度越高、收敛速度越快。



# 中厚板问题的等几何分析

一阶剪切变形理论 (FSDT) / **Reissner-Mindlin**

简化的一阶剪切变形理论

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\beta_x(x, y) \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}$$

- 适于分析中厚板
- 分析薄板时存在自锁现象

$$\begin{aligned}w_0 &= w_b + w_s \\ \beta_x &= -\partial w_b / \partial x \quad \beta_y = -\partial w_b / \partial y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\partial w_b(x, y) / \partial x \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\partial w_b(x, y) / \partial y \\w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)\end{aligned}$$

无自锁现象  
少一个自由度  
基函数需C<sup>1</sup>连续

**转角约束条件：**通过约束两排控制节点上的弯曲挠度使NURBS曲面在边界处斜率为零。

# 中厚板问题的等几何分析

## 剪切自锁分析（方板，受均布荷载）

| $a/h$   | $p=q=2$  |          | $p=q=3$  |          | 解析解 <sup>[181]</sup> |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------------------|
|         | FSDT     | S-FSDT   | FSDT     | S-FSDT   |                      |
| 100     | 0.40483  | 0.405834 | 0.40645  | 0.406446 | 0.40644              |
| 1000    | 3.14E-04 | 0.124233 | 0.067402 | 0.126526 | 0.126532             |
| 10000   | 3.15E-06 | 0.124233 | 0.001352 | 0.126525 | 0.126532             |
| 1000000 | 3.15E-08 | 0.124233 | 1.37E-05 | 0.126525 | 0.126532             |

四边简支条件下归

一个

(1) 基于一阶剪切变形理论，二阶NURBS基函数在长厚比 $a/h$ 大于100时存在自锁问题；三阶NURBS基函数在长厚比 $a/h$ 大于1000时存在自锁现象。

(2) 基于简化的一阶剪切变形理论，二阶和三阶NURBS基函数都无自锁现象，能有效地消除自锁问题。

(3) 增加NURBS基函数的阶次能提高求解的精度。

|         |          |          |          |          |          |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 10000   | 3.14E-04 | 0.124233 | 0.067402 | 0.126526 | 0.126532 |
| 100000  | 3.15E-06 | 0.124233 | 0.001352 | 0.126525 | 0.126532 |
| 1000000 | 3.15E-08 | 0.124233 | 1.37E-05 | 0.126525 | 0.126532 |

四边  
化中

# 中厚板问题的等几何分析

小变形几何非线性:

应变-位移关系  $\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{cases} = \begin{cases} u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \\ w_{,x} + u_{,z} \\ w_{,y} + v_{,z} \end{cases}$

非线性方程组  $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{F} = 0$

Newton-Raphson迭代求解

$$\Delta \mathbf{u}^n = -\mathbf{K}_t^{-1} \varphi^n$$
$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}^n$$

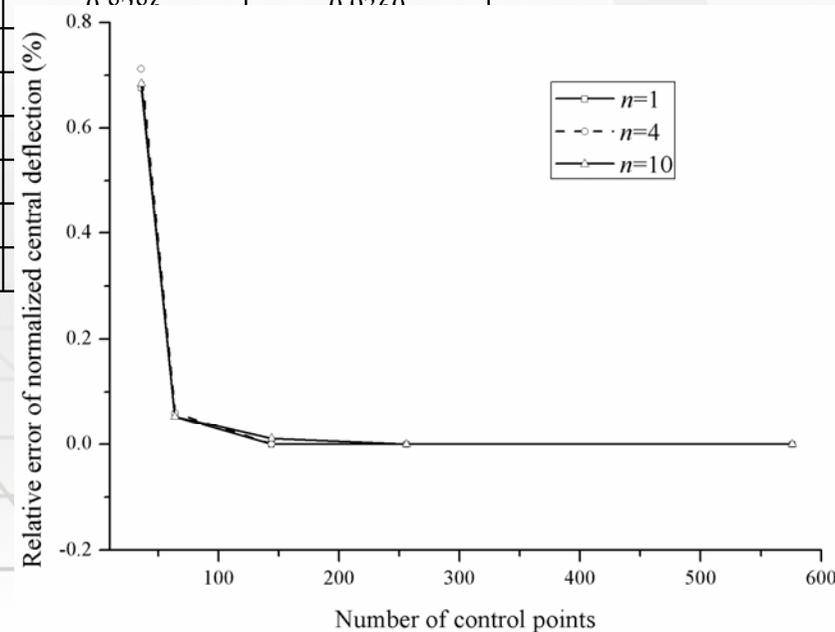
$$\sqrt{\frac{\sum_{I=1}^N |\mathbf{u}_I^{n+1} - \mathbf{u}_I^n|^2}{\sum_{I=1}^N |\mathbf{u}_I^{n+1}|^2}} < 10^{-3}$$

# 中厚板问题的等几何分析

算例：静力分析

四边简支Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>功能梯度板收敛性求解结果

| 方法     |                          | 控制节点数 | n=1    | n=4    | n=10   |
|--------|--------------------------|-------|--------|--------|--------|
| S-FSDT |                          | 6×6   | 0.5587 | 0.8227 | 0.9297 |
|        |                          | 8×8   | 0.5622 | 0.8281 | 0.9356 |
|        |                          | 12×12 | 0.5625 | 0.8286 | 0.9360 |
|        |                          | 16×16 | 0.5625 | 0.8286 | 0.9360 |
|        |                          | 24×24 | 0.5625 | 0.8286 | 0.9360 |
| FSDT   |                          | 16×16 | 0.5625 | 0.8286 | 0.9360 |
| 精确解    | Thai <sup>[170]</sup>    | -     | 0.5625 |        |        |
|        | Neves <sup>[171]</sup>   | -     | 0.5648 |        |        |
|        | Carrera <sup>[172]</sup> | -     | 0.5625 |        |        |

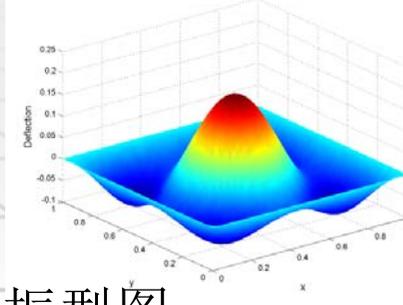
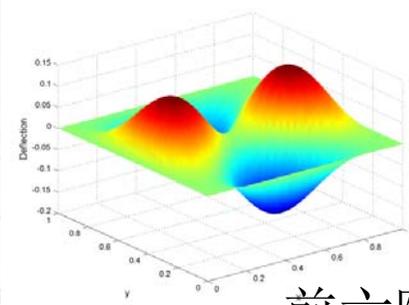
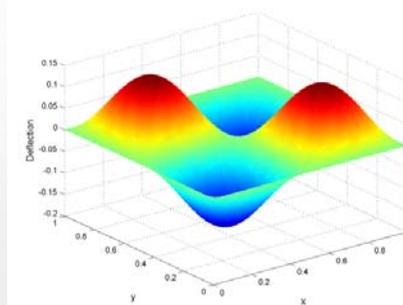
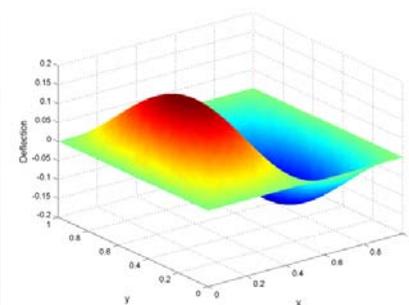
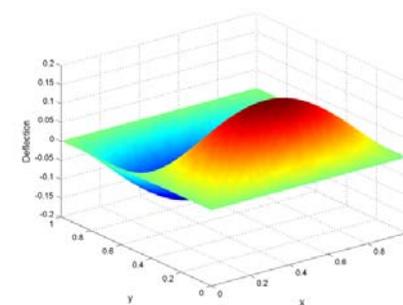
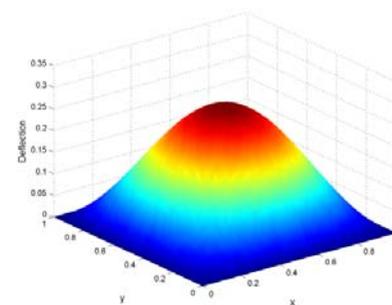


# 中厚板问题的等几何分析

算例：自由振动

四边简支Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>功能梯度板第一阶自振频率

| 方法     |                            | 控制节点数 | n=1    | n=4    | n=10   |
|--------|----------------------------|-------|--------|--------|--------|
| S-FSDT |                            | 6×6   | 0.1625 | 0.1391 | 0.1321 |
|        |                            | 8×8   | 0.1625 | 0.1389 | 0.1320 |
|        |                            | 12×12 | 0.1624 | 0.1390 | 0.1320 |
|        |                            | 16×16 | 0.1624 | 0.1390 | 0.1320 |
|        |                            | 24×24 | 0.1624 | 0.1390 | 0.1320 |
| FSDT   |                            | 16×16 | 0.1630 | 0.1398 | 0.1323 |
| 精确解    | Matsunaga <sup>[182]</sup> | -     | 0.1640 | 0.1383 | 0.1306 |
|        | Thai <sup>[183]</sup>      | -     | 0.1631 | 0.1378 | 0.1301 |



前六阶振型图

# 中厚板问题的等几何分析

算例： 屈曲分析

不同边界条件及长宽比的均匀材料矩形板归一化临界屈曲荷载计算结果

| B.C. | a/b | $(\zeta_1, \zeta_2)$ | S-FSDT  | FSDT    | Yu <sup>[188]</sup> | Zhao <sup>[189]</sup> |
|------|-----|----------------------|---------|---------|---------------------|-----------------------|
| SSSS | 0.5 | -1,0                 | 15.4200 | 15.415  | 15.42               | 15.4212               |
|      | 1   | -1,-1                | 12.3358 | 12.3316 | 12.33               | 12.337                |
| SCSC | 0.5 | -1,0                 | 39.4720 | 39.4502 | 39.23               | 39.4784               |
|      | 1   | -1,-1                | 19.7360 | 19.7251 | 19.74               | 19.7392               |
| SFSF | 0.5 | -1,0                 | 18.9763 | 18.9736 | 18.97               | 18.9775               |
|      | 1   | -1,-1                | 14.6158 | 14.6102 | 14.62               | 14.6174               |

# 中厚板问题的等几何分析

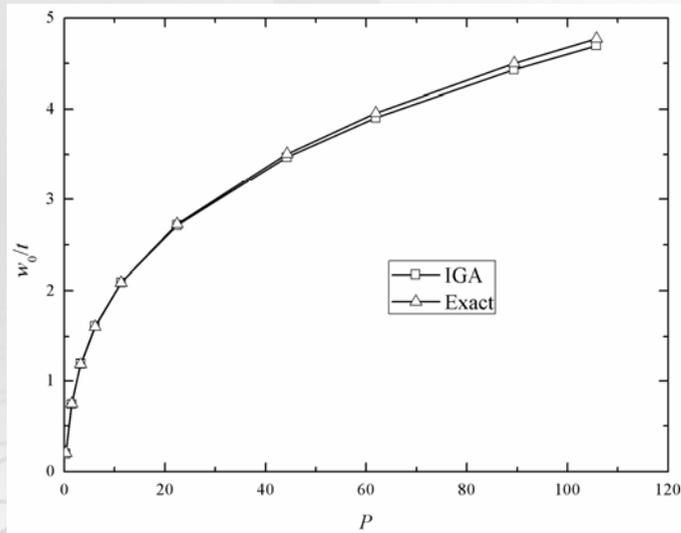
算例：小变形几何非线性分析

均布荷载作用下均匀材料  
正方形薄板解析解为

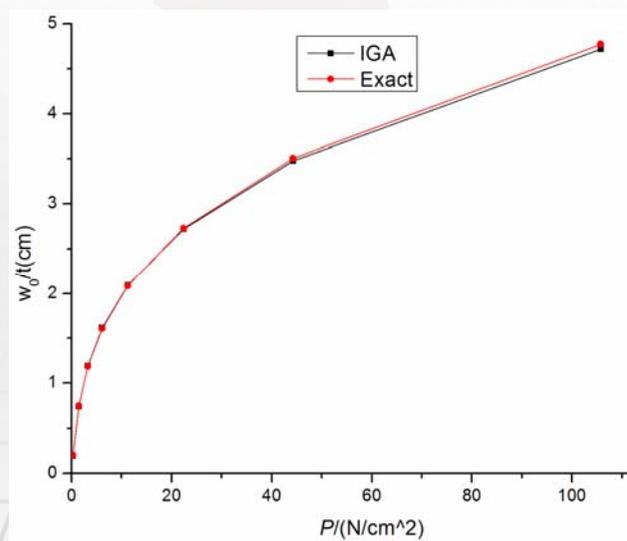
$$w_0 = 2.5223w_1$$

$$\left(\frac{w_1}{h}\right)^3 + 0.2522\frac{w_1}{h} = 0.0001333\frac{q_0L^4}{Dh}$$

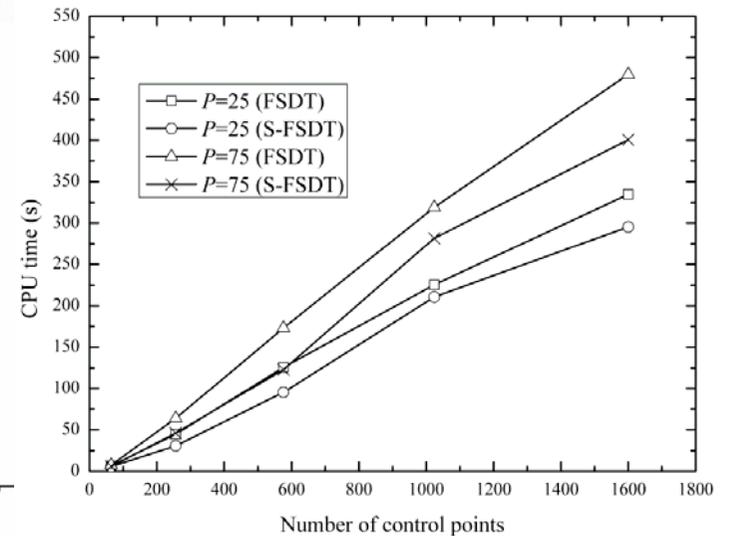
采用基于简化的一阶剪切变形理论的等几何分析能获得与基于一阶剪切变形理论的等几何分析相同的结果，但计算效率要高。



S-FSDT



FSDT



# 含内部缺陷板问题的等几何分析

位移模式

$$\begin{aligned} (u_i^h, v_i^h, w_i^h)(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in N^s} R_i(\mathbf{x})(u_i, v_i, w_i) + \sum_{j \in N^{cut}} R_j(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x})(b_j^u, b_j^v, b_j^w) \\ & + \sum_{k \in N^{tip}} R_k(\mathbf{x}) \left( \sum_{l=1}^4 (c_{kl}^u, c_{kl}^v, c_{kl}^w) \mathbf{G}_l(r, \theta) \right) \end{aligned}$$

一阶剪切变形理论

■ 适于分析中厚板问题

开裂板

$$\begin{aligned} (\beta_x^h, \beta_y^h)(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in N^s} R_i(\mathbf{x})(\beta_{xi}, \beta_{yi}) + \sum_{j \in N^{cut}} R_j(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x})(b_j^{\beta_x}, b_j^{\beta_y}) \\ & + \sum_{k \in N^{tip}} R_k(\mathbf{x}) \left( \sum_{l=1}^4 (c_{kl}^{\beta_x}, c_{kl}^{\beta_y}) \mathbf{F}_l(r, \theta) \right) \end{aligned}$$

■ 分析薄板问题时存在自锁现象

■ 裂纹对自锁现象也有影响

裂尖加强函数

$$\mathbf{G}_l(r, \theta) = \left\{ r^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), r^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), r^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right), r^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\}$$

$$\mathbf{F}_l(r, \theta) = \left\{ r^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), r^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), r^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), r^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\}$$

# 含内部缺陷板问题的等几何分析

含孔洞板

$$(u_i^h, v_i^h, w_i^h)(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N^s} H(\mathbf{x}) R_i(\mathbf{x}) (u_i, v_i, w_i)$$

$$(\beta_x^h, \beta_y^h)(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N^s} H(\mathbf{x}) R_i(\mathbf{x}) (\beta_{xi}, \beta_{yi})$$

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases}$$

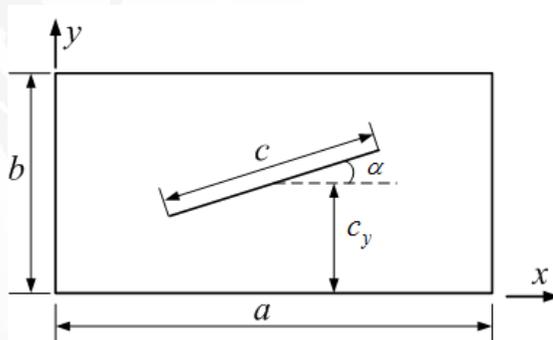
消除剪切自锁方法

$$\bar{\mathbf{D}}^s = \mathbf{D}^s \frac{h^2}{h^2 + \alpha l^2}$$

其中  $l$  是NURBS单元中最长边长，取  $\alpha = 0.1$

# 含内部缺陷板问题的等几何分析

算例：自由振动



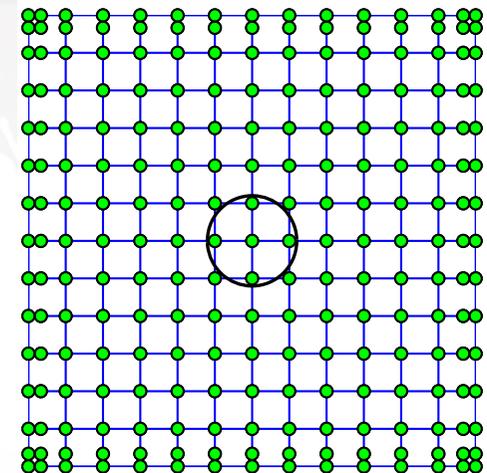
裂纹长度为 $c/a=0.4$ 时，不同计算网格前5阶归一化频率计算结果

| 单元数                    | 阶次     |        |        |        |        |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
| 9×9                    | 18.053 | 45.675 | 48.536 | 77.114 | 83.280 |
| 13×13                  | 18.135 | 46.274 | 48.773 | 77.794 | 84.129 |
| 17×17                  | 18.178 | 46.711 | 48.874 | 78.078 | 84.553 |
| 21×21                  | 18.193 | 46.620 | 48.919 | 78.243 | 84.726 |
| 25×25                  | 18.206 | 46.604 | 48.945 | 78.333 | 84.858 |
| 不修正                    | 18.605 | 48.389 | 49.173 | 78.815 | 88.080 |
| Stahl <sup>[194]</sup> | 18.279 | 46.624 | 49.032 | 78.602 | 85.510 |

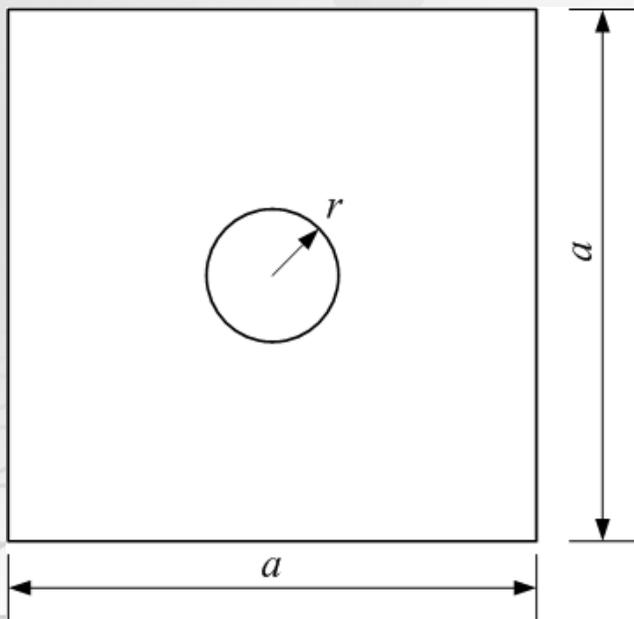
# 含内部缺陷板问题的等几何分析

算例：屈曲分析

考虑含中心圆孔Al/ZrO<sub>2</sub>功能梯度正方形板



单轴压缩荷载作用下，含中心圆孔的Al/ZrO<sub>2</sub>功能梯度板归一化临界屈曲荷载系数计算结果



| 网格                         | $n$    |        |        |
|----------------------------|--------|--------|--------|
|                            | 0      | 1      | 5      |
| 6×6                        | 8.0015 | 5.5946 | 4.7567 |
| 12×12                      | 7.2389 | 5.0623 | 4.3021 |
| 18×18                      | 6.9999 | 4.8933 | 4.1625 |
| 24×24                      | 6.9923 | 4.8879 | 4.1582 |
| Natarajan <sup>[200]</sup> | 7.0247 | 4.9105 | 4.1760 |
| Zhao <sup>[199]</sup>      | 6.9711 | 4.6858 | 4.0609 |

## 基于简化的准三维板理论的等几何分析

经典板理论忽略了横向剪切变形影响，只适用于薄板。

一阶剪切变形理论虽然考虑了横向剪切变形影响，但依赖于补充剪切修正因子，且影响剪切修正因子的因素有很多，比如几何形状、边界条件、外力荷载等。

在高阶剪切变形理论中，通过在位移场引入高阶项，从而提高了描述剪切变形的准确性，避免了使用剪切修正因子。准三维板理论属于高阶剪切变形理论的一种，横向位移沿板厚度变化，从而捕捉厚度拉伸效应。

## 基本理论

在广义准三维双曲线板理论中，板内位移可以表示为：

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + \varphi_z \frac{d\Psi(z)}{dz}$$

$$u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \varphi_x \quad \varphi_y \quad \varphi_z$$

中面六个未知位移量

$\Psi(z)$  沿厚度方向的横向剪切应变和剪切应力分布的形状函数，该函数可表达为

$$\Psi(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$$

简化的准三维板理论假设：(a) 将横向位移  $w_0$  分解为弯曲挠度  $w_b$  和剪切挠度  $w_s$  两部分，

即  $w_0 = w_b + w_s$ ；(b) 转角仅用剪切挠度对板内两个纵向坐标  $x, y$  分别求导表示，即  $\varphi_x = \frac{\partial w_s}{\partial x}$ ，

$$\varphi_y = \frac{\partial w_s}{\partial y}。$$

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi_z$$

其中  $f(z) = z - \Psi(z)$ ， $g(z) = \frac{d\Psi(z)}{dz} = 1 - \frac{df(z)}{dz} = \cosh\left(\frac{z}{h}\right) - \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$ ，可以看出，自由度数

目已简化为  $u_0, v_0, w_b, w_s, \varphi_z$  五个。

在板的上下表面，即当  $z = \pm \frac{h}{2}$  时，有  $g\left(z = \pm \frac{h}{2}\right) = 0$ ，横向剪切应变  $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  在板的上

下表面均等于 0，所以在简化的准三维板理论中不需要剪切修正因子。

## 算例1：剪切自锁分析

长为 $a$ ，厚度为 $h$ 受均布荷载 $P = 1\text{N}$ 的四边简支正方形均质板

$$E = 1.092 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\bar{w} = \frac{100wEh^3}{12(1-\nu^2)Pa^4}$$

| $a/h$  | 方法                      | $\bar{w}$ | 误差 (%) | $a/h$  | 方法                      | $\bar{w}$ | 误差 (%) |
|--------|-------------------------|-----------|--------|--------|-------------------------|-----------|--------|
| 20     | 本文方法                    | 0.4109    | 0.0243 | 100    | 本文方法                    | 0.4064    | 0      |
|        | S-FSDT <sup>[150]</sup> | 0.4115    | 0.1704 |        | S-FSDT <sup>[150]</sup> | 0.4064    | 0      |
|        | 解析解 <sup>[151]</sup>    | 0.4108    |        |        | 解析解 <sup>[151]</sup>    | 0.4064    |        |
| $10^3$ | 本文方法                    | 0.4062    | 0      | $10^4$ | 本文方法                    | 0.4062    | 0      |
|        | S-FSDT <sup>[150]</sup> | 0.4062    | 0      |        | S-FSDT <sup>[150]</sup> | 0.4062    | 0      |
|        | 解析解 <sup>[151]</sup>    | 0.4062    |        |        | 解析解 <sup>[151]</sup>    | 0.4062    |        |
| $10^5$ | 本文方法                    | 0.4062    | 0      | $10^6$ | 本文方法                    | 0.4062    | 0      |
|        | S-FSDT <sup>[150]</sup> | 0.4062    | 0      |        | S-FSDT <sup>[150]</sup> | 0.4062    | 0      |
|        | 解析解 <sup>[151]</sup>    | 0.4062    |        |        | 解析解 <sup>[151]</sup>    | 0.4062    |        |

## 算例2：四边简支Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> 功能梯度正方形板自振频率响应

Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> 材料方形板，宽厚比  $a/h = 5$  ，基于两种不同理论的等几何分析结果

| Number of control points | Method               | $n=1$  | $n=4$  | $n=10$ |
|--------------------------|----------------------|--------|--------|--------|
| $6 \times 6$             | S-FSDT based IGA[32] | 0.1625 | 0.1391 | 0.1321 |
|                          | Present              | 0.1655 | 0.1405 | 0.1316 |
| $8 \times 8$             | S-FSDT based IGA[32] | 0.1625 | 0.1389 | 0.1320 |
|                          | Present              | 0.1654 | 0.1404 | 0.1315 |
| $12 \times 12$           | S-FSDT based IGA[32] | 0.1624 | 0.1390 | 0.1320 |
|                          | Present              | 0.1654 | 0.1404 | 0.1315 |
| $16 \times 16$           | S-FSDT based IGA[32] | 0.1624 | 0.1390 | 0.1320 |
|                          | FSDT based IGA[32]   | 0.1630 | 0.1398 | 0.1323 |
|                          | Present              | 0.1654 | 0.1404 | 0.1315 |
| $24 \times 24$           | S-FSDT based IGA[32] | 0.1624 | 0.1390 | 0.1320 |
|                          | Present              | 0.1654 | 0.1403 | 0.1315 |

固有频率计算结果收敛迅速，且梯度指数对计算结果影响显著，梯度指数越大，自振频率越小。

### 算例3：屈曲分析

双轴压缩的四边简支的  
Al/SiC方形功能梯度板  
临界屈曲荷载

Al 材料参数：

$$E_m = 70\text{GPa}$$

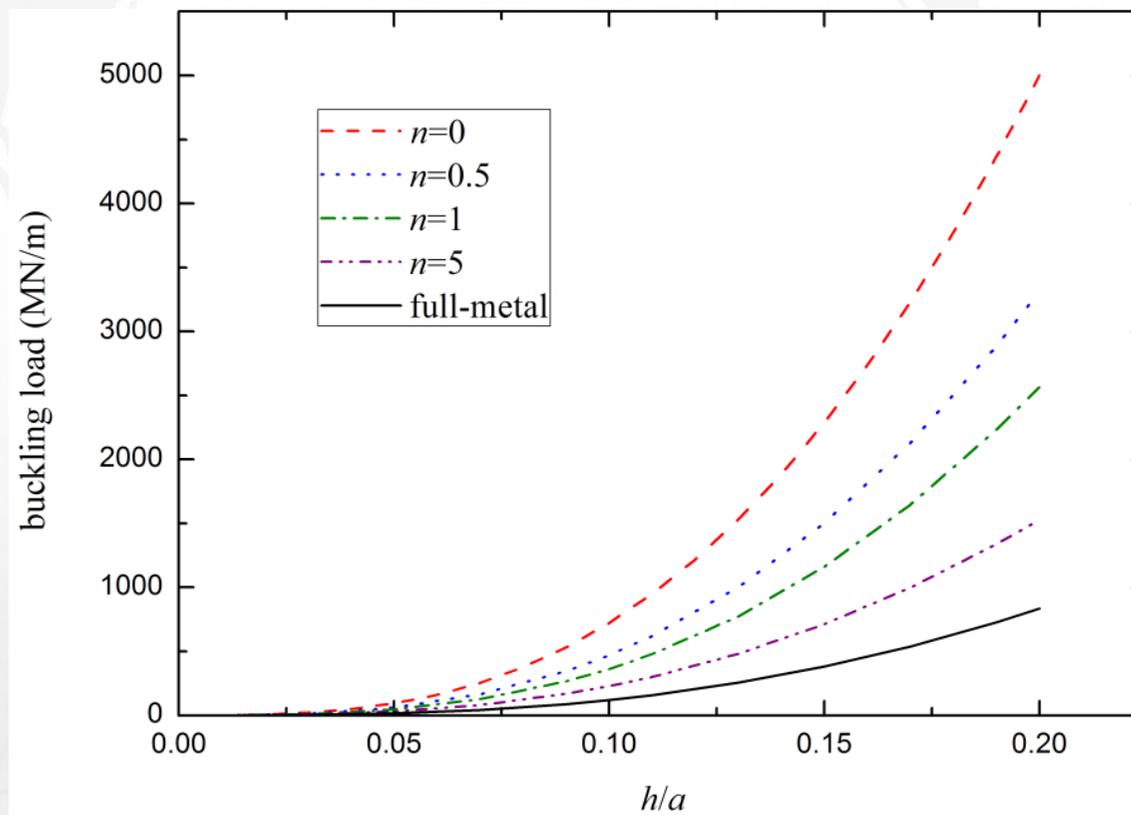
$$\nu_m = 0.3$$

SiC材料参数：

$$E_c = 420\text{GPa}$$

$$\nu_c = 0.3$$

可以明显看到屈曲荷载随着厚宽比的增大而增大，且梯度指数越大屈曲荷载越小



双轴压缩条件下四边简支Al/SiC功能梯度正方形板屈曲荷载

## 微型薄板的等几何分析

当材料进入微米量级时，材料和结构会表现不同于宏观尺度时的力学行为，即材料的微尺度效应，大量的试验都观察到了这种微尺度效应。因此在分析小尺寸构件时，有必要考虑微尺度效应。

对微尺度效应研究的理论主要有非局部理论、应变梯度理论和偶应力理论，上述理论中均采用材料特征长度参数来描述这种微尺度效应，而修正的偶应力理论中只需要一个材料特征长度参数就可以对微尺度效应加以研究，因此该理论的应用比较广泛。

## 基本理论

在基尔霍夫板理论假设下，位移场可以表达为：

$$u_1(x, y, z) = u(x, y) - z \partial w / \partial x$$

$$u_2(x, y, z) = v(x, y) - z \partial w / \partial y$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y)$$

其中  $u$ ,  $v$ , 和  $w$  分别为中面上任意一点三个方向上的未知位移。

根据修正偶应力理论，各向同性线弹性材料的本构方程为

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$m_{ij} = 2l^2 \mu \chi_{ij}$$

其中  $\sigma_{ij}$  和  $m_{ij}$  分别是对称应力张量和偶应力张量中的偏应力张量。 $\delta_{ij}$  是克罗内克符号， $\lambda$  和  $\mu$  分别是拉梅常数， $\mu$  也被称为剪切模量。 $l$  是材料特征长度参数， $\varepsilon_{ij}$  和  $\chi_{ij}$  分别为应变张量和对称曲率张量：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i})$$

其中， $u_i$  是位移， $\theta_i$  是转角。

$$\theta_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j}$$

## 算例1

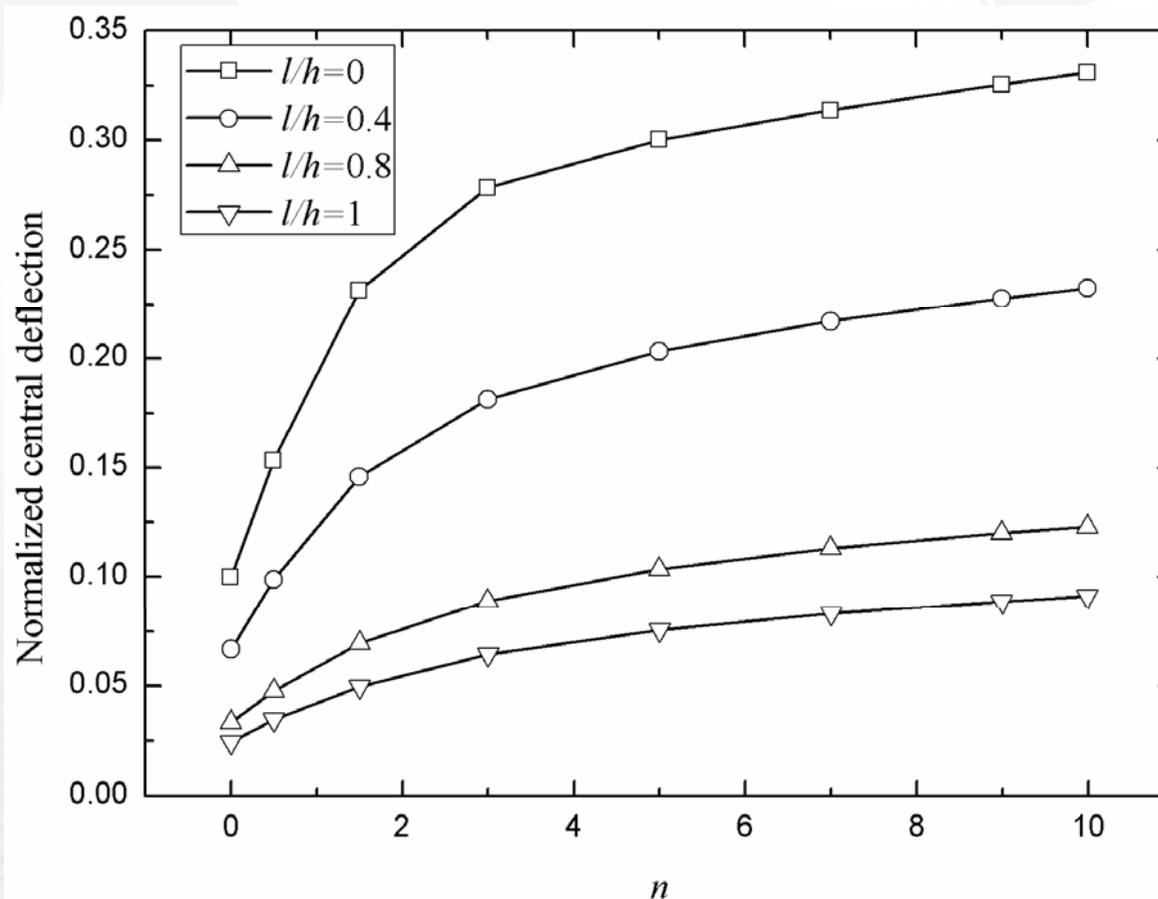
Al:  $E_m = 70\text{GPa}$   $\nu_m = 0.3$

$\text{Al}_2\text{O}_3$ :  $E_c = 380\text{GPa}$   $\nu_c = 0.3$

$p \sin(\pi x) \sin(\pi y)$

$a/h = 20$

归一化挠度计算结果随着梯度指数的增加而增加；当梯度指数相同时，材料特征长度参数比越大，归一化挠度越小



材料特征长度参数比对受正弦荷载的四边夹支Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>材料正方形功能梯度微型板归一化中心挠度影响。

## 算例2

正弦荷载条件下四边简支正方形均质材料板归一化中心挠度

| $h=17.6 \times 10^{-6} \text{m}$<br>$a=20h$<br>$p \sin(\pi x) \sin(\pi y)$<br>$E=14.4 \text{GPa}$<br>$\nu=0.38$ | $l/h$ | 阶次 | 控制点数   |        |        |        |        | 解析解 <sup>[168]</sup> |        |
|---|-------|----|--------|--------|--------|--------|--------|----------------------|--------|
|   |       |    | 7×7    | 9×9    | 11×11  | 13×13  | 15×15  |                      | 17×17  |
|   |       | 2  | 0.2594 | 0.2614 | 0.2622 | 0.2626 | 0.2629 | 0.2635               |        |
|   | 0     | 3  | 0.2637 | 0.2636 | 0.2635 | 0.2635 | 0.2635 | 0.2635               | 0.2635 |
|   |       | 4  | 0.2636 | 0.2635 | 0.2635 | 0.2635 | 0.2635 | 0.2635               |        |
|   |       | 2  | 0.2260 | 0.2276 | 0.2283 | 0.2287 | 0.2289 | 0.2290               |        |
|   | 0.2   | 3  | 0.2296 | 0.2294 | 0.2294 | 0.2294 | 0.2294 | 0.2294               | 0.2294 |
|   |       | 4  | 0.2294 | 0.2294 | 0.2294 | 0.2294 | 0.2294 | 0.2294               |        |

基函数阶次大于2  
时，计算结果快速  
收敛

[168]Thai HT, Choi DH. Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory. Compos. Struct. 2013;95 (1):142-53.

### 算例3

双轴压缩四边简支的功能梯度材料正方形板归一化临界屈曲荷载。

$$E_c = 14.4 \text{ GPa} \quad E_m = 1.44 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.38 \quad h = 17.6 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\text{边长: } a = 20h$$

临界屈曲荷载随着梯度指数的增加而减小，同一梯度指数时，临界屈曲荷载随着材料特征长度参数比的增加而增加。

| $l/h$ | $n=0$   |              | $n=1$   |              | $n=10$  |              |
|-------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|
|       | 本文方法    | 精确解<br>[168] | 本文方法    | 精确解<br>[168] | 本文方法    | 精确解<br>[168] |
| 0     | 19.2255 | 19.2255      | 8.3789  | 8.2145       | 3.9394  | 3.8359       |
| 0.2   | 22.0863 | 22.0863      | 9.9524  | 9.7879       | 4.4596  | 4.3560       |
| 0.4   | 30.6686 | 30.6685      | 14.6728 | 14.5082      | 6.0201  | 5.9164       |
| 0.6   | 44.9724 | 44.9723      | 22.5402 | 22.3753      | 8.6209  | 8.5171       |
| 0.8   | 64.9977 | 64.9976      | 33.5544 | 33.3892      | 12.2621 | 12.1581      |
| 1     | 90.7445 | -            | 47.7157 | -            | 16.9437 | -            |

[168]Thai HT, Choi DH. Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory. Compos. Struct. 2013;95 (1):142-53.

基于考虑修正偶应力理论的非经典Kirchhoff理论，考虑微尺度效应使得微型薄板的刚度有所增加，挠度会有所降低而自振频率和屈曲荷载会有所增加，这种微尺度效应对薄板的力学性能影响明显。

简化的一阶剪切变形理论(SFSDT)中，挠度被分解为弯曲挠度 $w_b$ 和剪切挠度 $w_s$ 两部分，并且假设转角均由弯曲挠度对坐标的导数求得，故而满足薄板假设消除了剪切锁定现象。等几何分析中的非均匀有理B样条（NURBS）形函数具有高阶连续性，可以直接满足非经典简化的一阶剪切变形理论中对 $C^2$ 连续性的要求。

微尺度效应增加微型板的刚度，因而小尺寸效应增加自振频率和屈曲荷载。裂纹的出现和裂纹长度减少微型板刚度，因此裂纹长度的增加减少自振频率和屈曲荷载。

## 考虑表面能和微结构的纳米薄板的等几何分析

在微纳米尺度下，材料的表面应力对其力学性能将产生重要影响，使其力学行为不同于经典的薄膜材料。在大尺寸结构中，材料的表面积体积比非常小，故表面效应不是十分明显可以忽略。处于微纳米量级的固体材料，其材料特征长度参数和表面应力会对材料力学性能产生显著影响。

Gurtin-Murdoch (G-M) 的表面弹性理论是考虑材料表面弹性的最为经典的理论模型，这一理论能够比较好的解释微纳米尺度下的材料和结构的力学行为。引入Gurtin-Murdoch表面弹性理论，结合非经典Kirchhoff理论，利用等几何分析方法，就可以对纳米薄板的力学性态进行分析。

## 基本理论

根据表面弹性理论，各向同性弹性材料中有

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\pm} = [\tau_0 + (\lambda_0 + \tau_0)u_{\gamma,\gamma}^{\pm}] \delta_{\alpha\beta} + \mu_0 (u_{\alpha,\beta}^{\pm} + u_{\beta,\alpha}^{\pm}) - \tau_0 u_{\beta,\alpha}^{\pm}$$

$$\sigma_{3\beta}^{\pm} = \tau_0 u_{3,\beta}^{\pm}$$

其中  $\sigma_{\alpha\beta}^{\pm}$  和  $\sigma_{3\beta}^{\pm}$  为表面应力，“+”和“-”分别代表板的上表面和下表面。 $\mu_0$  和  $\lambda_0$  为表面拉梅常数， $\tau_0$  是残余表面应力。

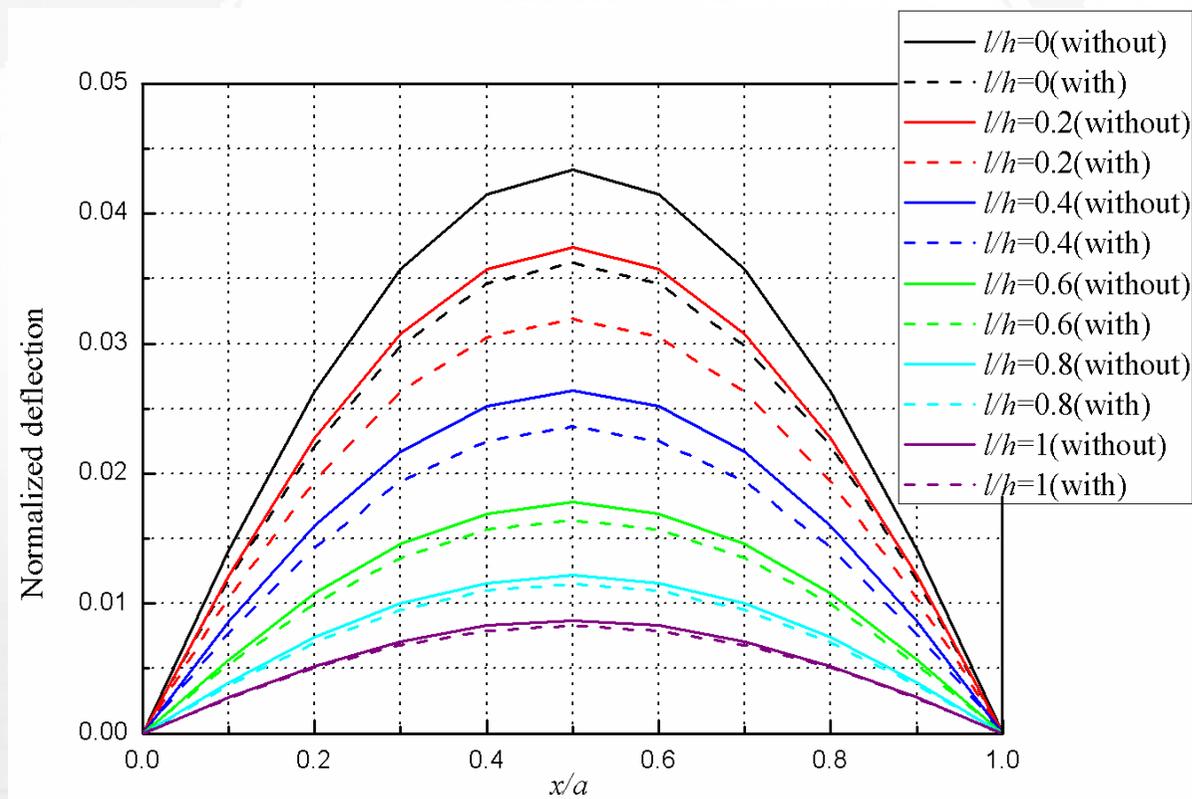
在基尔霍夫假设下，应力  $\sigma_z = 0$ 。但这并不满足 Gurtin-Murdoch 表面应力模型。在 Gurtin-Murdoch 表面应力模型中，假设  $\sigma_z$  是沿板厚度方向呈线性变化

$$\sigma_z = \frac{1}{2} [(\tau_{xz,x}^+ + \tau_{yz,y}^+) - (\tau_{xz,x}^- + \tau_{yz,y}^-)] + \frac{z}{h} [(\tau_{xz,x}^+ + \tau_{yz,y}^+) - (\tau_{xz,x}^- + \tau_{yz,y}^-)]$$

## 算例1：表面能对板弯曲性能的影响

正方形Si纳米板  
边长为  $a = 200\text{nm}$   
厚度为  $h = 10\text{nm}$

材料特征长度参数增加时，板刚度在增加；在考虑了表面能影响后，板的刚度会进一步增加，所以得到的归一化挠度比没有考虑表面能时有所减小。



四边简支的Si纳米板在均布荷载作用下归一化挠度

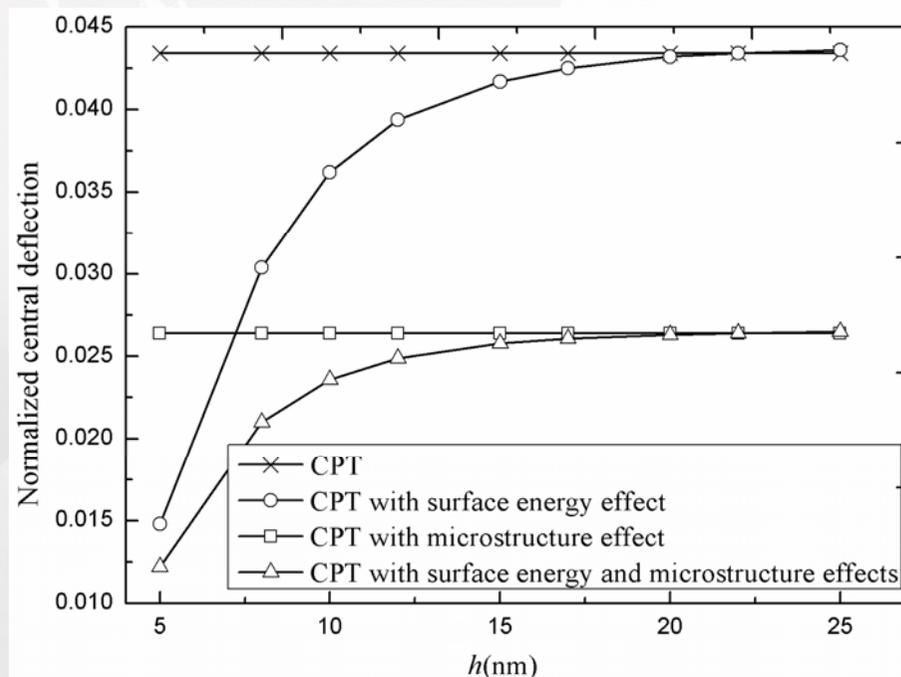
## 算例2

正方形Si纳米板

边长为  $a = 200\text{nm}$

厚度为  $h = 10\text{nm}$

均布荷载



受均布荷载的四边简支纳米板归一化挠度计算结果

(1)与经典板理论相比，考虑表面能影响和考虑微尺度效应影响都会使板的刚度变大；

(2)使用经典板理论和考虑微尺度效应影响的非经典板理论分析时，改变板厚度对计算结果基本没有影响。使用另外两种板理论时的计算结果会随着板厚度的增加而增加，最后达到一个比较稳定的数值；

(3)从计算结果来看，当板厚度为5nm到7nm时，使用仅考虑表面能影响的非经典板理论分析时，比使用仅考虑微尺度效应影响的非经典板理论分析时更能显著改变纳米板的刚度。

### 算例3: 屈曲荷载

四边简支正方形纳米板临界屈曲荷载

正方形Si纳米板、Al纳米板  
边长为  $a = 200nm$   
厚度为  $h = 10nm$

|      | $l/h$ | Si      |         | Al      |         |
|------|-------|---------|---------|---------|---------|
|      |       | 考虑表面效应  | 未考虑表面效应 | 考虑表面效应  | 未考虑表面效应 |
| 双轴压缩 | 0     | 2.3901  | 2.0000  | 2.6127  | 2.0000  |
|      | 0.2   | 2.7117  | 2.3216  | 2.9823  | 2.3696  |
|      | 0.4   | 3.6765  | 3.2864  | 4.0911  | 3.4784  |
|      | 0.6   | 5.2845  | 4.8944  | 5.9391  | 5.3264  |
|      | 1     | 10.5691 | 9.7888  | 11.8783 | 10.6528 |
| 单轴压缩 | 0.8   | 15.0715 | 14.2912 | 17.0527 | 15.8272 |
|      | 1     | 20.8603 | 20.0800 | 23.7055 | 22.4800 |

(1) 无论是否考虑表面能的影响，归一化临界屈曲荷载

增加，双轴压缩时，接近双轴压缩时的两倍。

表面能效应和微尺度效应都显著地增加纳米板的刚度，使得纳米板的弯曲挠度减小和屈曲荷载增加。

对于超薄的纳米板，表面能效应成为主导。

屈曲荷载：(4) 单轴压缩时的临界屈曲荷载接近双轴压缩时的两倍。

**3.等几何边界元法  
求解  
稳态温度场问题**

## 问题的提出

目前用途最为广泛，适用性最强的数值计算方法，但用于建模使用的数据与用于计算的数据模型不统一，造成前处理需要消耗大量时间。

由于建模的特殊性在于是对几何模型的边界进行建模，而边界元又恰恰是使用边界上的数据进行计算。等几何边界元可以将两者优势结合在一起，使CAD与CAE更完美的结合。



IGA的提出克服了有限元中存在的一些不足，提高了计算效率与准确性，将CAD于CAE进行了完美结合。



## 基本理论 • 等几何边界元法求解温度场问题

在热传导理论中，稳态温度场问题的微分方程为

$$k\nabla^2 T + q_v = 0 \quad \text{in } \Omega$$

边界条件为：

$$T = \bar{T} \quad (\text{一类边界})$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = q_2 \quad (\text{二类边界})$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + hT = q_3 \quad (\text{三类边界})$$



## 基本理论 • 等几何边界元法求解温度场问题

根据加权余量法，格林积分以及分部积分等数学手段，可推得边界积分方程

$$T(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}) q^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \frac{h}{k} T(\mathbf{x}) T^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} q(\mathbf{x}) T^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma$$

$\mathbf{x}'$  定义为源点，是域内一点

$\mathbf{x}$  定义为场点，是边界上点

$T^*$ 、 $q^*$  为基本解

$\Gamma$  为整个几何边界

$\Gamma_3$  为存在第三类边界条件的几何边界



## 基本理论 • 等几何边界元法求解温度场问题

当边界上的 $T(\mathbf{x})$ 和 $q(\mathbf{x})$ 全为已知时，便可计算出域内任意一点 $\mathbf{x}'$ 处的温度，但由于边界积分方程的源点 $\mathbf{x}'$ 位于域内，为了求出边界上的未知量 $T(\mathbf{x})$ 和 $q(\mathbf{x})$ ，需要将源点安置在边界上，边界积分改写为

$$C(\mathbf{x}')T(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}) \cdot q^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \frac{h}{k} \cdot T^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} q(\mathbf{x}) \cdot T^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma$$

当只有前两类边界条件时，可简化为

$$C(\mathbf{x}')T(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}) \cdot q^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} q(\mathbf{x}) \cdot T^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma$$



## 基本理论 • 等几何边界元法求解温度场问题

根据离散的思想，将边界离散为  $N_e$  个互不重合的单元

$$C(\mathbf{x}')T(\mathbf{x}') + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^m \left[ \int_{-1}^1 q^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\hat{\xi})) N_l(\hat{\xi}) J^e(\hat{\xi}) d\hat{\xi} \right] T_l^e =$$
$$\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^m \left[ \int_{-1}^1 T^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\hat{\xi})) N_l(\hat{\xi}) J^e(\hat{\xi}) d\hat{\xi} \right] q_l^e$$

将源点定义为离散的节点时，就可以得到矩阵形式

$$\mathbf{HT} = \mathbf{Gq}$$

根据边界条件对矩阵进行处理，可得

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$



## 基本理论 • 等几何边界元法求解温度场问题

在IGA中，几何曲线是通过节点向量、控制节点和权因子构造的，网格单元和节点向量有关。在传统BEM中，配点就定义为单元的节点，但是在IGABEM中，节点（就是IGA中的控制点）并不一定处在边界位置上，因此关于配点的定义为

$$\xi'_i = \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i+2} + \dots + \xi_{i+p}}{p} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

根据插值的思想和NURBS的局部支撑性可得

$$T(\xi) = \sum_{l=1}^{p+1} R_{l,p}(\xi) T_l^e \quad q(\xi) = \sum_{l=1}^{p+1} R_{l,p}(\xi) q_l^e$$

离散后的等几何边界元的边界积分方程

$$C(\mathbf{x}') \sum_{l=1}^{p+1} R_{l,p}^{e'}(\hat{\xi}') T_l^{e'} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^{p+1} \left[ \int_{-1}^1 q^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\hat{\xi})) R_{l,p}^e(\hat{\xi}) J^e(\hat{\xi}) d\hat{\xi} \right] T_l^e + \sum_{e''=1}^{n_e} \sum_{l=1}^{p+1} \left[ \int_{-1}^1 T^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\hat{\xi})) R_{l,p}^{e''}(\hat{\xi}) J^{e''}(\hat{\xi}) d\hat{\xi} \right] T_l^{e''} = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^{p+1} \left[ \int_{-1}^1 T^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}(\hat{\xi})) R_{l,p}^e(\hat{\xi}) J^e(\hat{\xi}) d\hat{\xi} \right] q_l^e$$

## 基本理论 • 等几何边界元法求解温度场问题

### 奇异积分

当源点处于积分单元时，在计算**H**矩阵和**G**矩阵时就会分别出现强奇异积分以及弱奇异积分。在传统边界元中，常位势法通常可以用来避免强奇异积分问题，但是在IGABEM中，该方法失效。采用消减奇异部分的方法（SST）来进行计算，该方法将奇异单元分为包含奇异点的一小块奇异部分和可以正则积分部分，奇异部分通过解析的方法求得。对于弱奇异积分部分，用Tells提供的坐标变换的方法可以有效避免奇异性。

### 边界条件施加

当边界条件为常量时，可以直接在控制点上施加；当边界条件为非常量时，可以直接使用边界积分方程进行计算，进而避免了等几何中边界条件施加造成的误差。

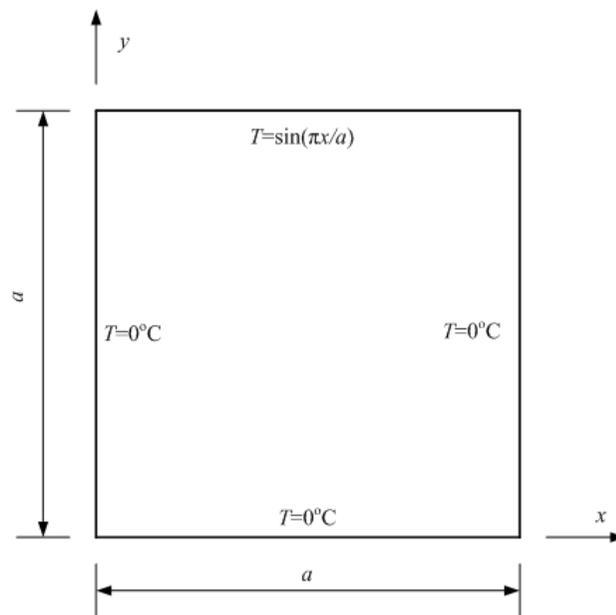


## 算例分析与讨论 • 等几何边界元法求解温度场问题

### ● 矩形问题

长度为 $a$ 的矩形平板，上边界温度为  $T = \sin(\pi x/a)$ ，其余边界温度都为0

该问题拥有解析解  $T = \frac{\sin(\pi x/a) \sinh(\pi y/a)}{\sinh(\pi)}$



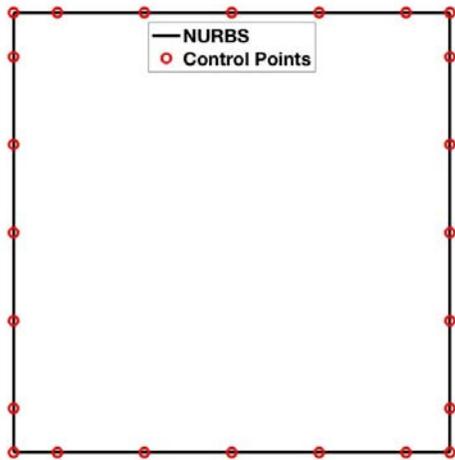


## 算例分析与讨论 • 等几何边界元法求解温度场问题

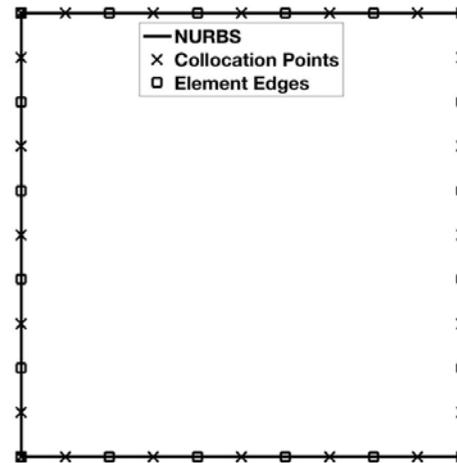
几何模型的初始节点向量及权系数为

$$\mathbf{k} = \{0, 0, 0, 1/4, 1/4, 2/4, 2/4, 3/4, 3/4, 1, 1, 1\}$$

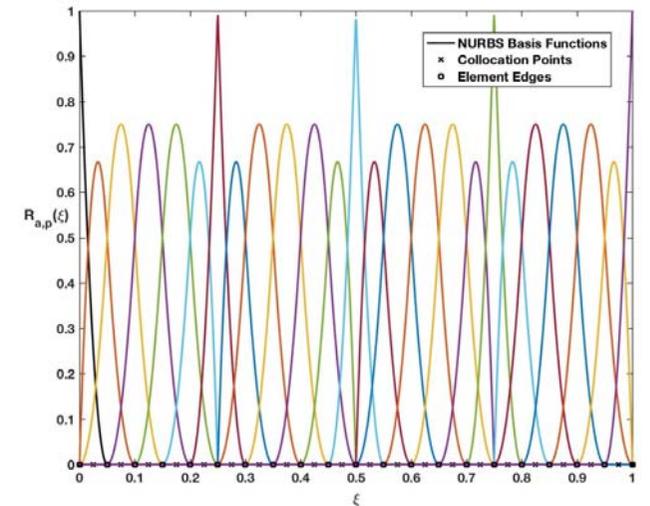
$$\mathbf{w} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$



控制节点



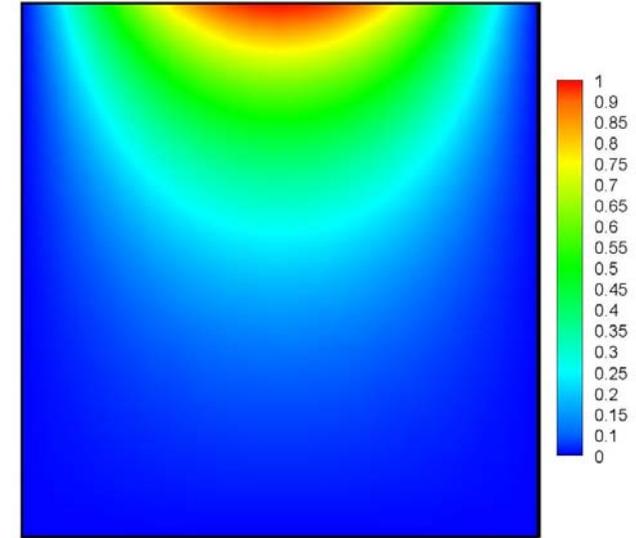
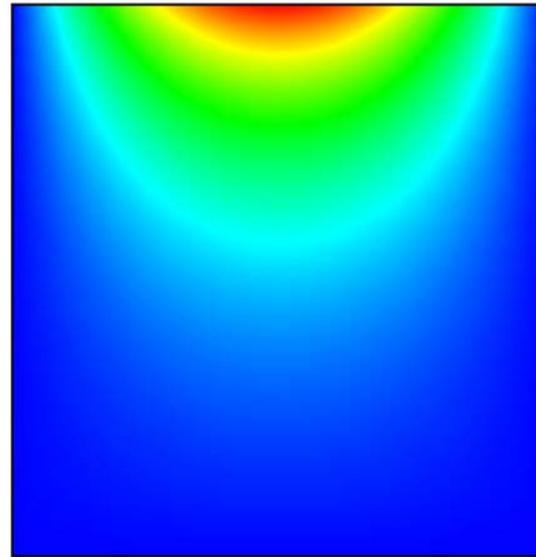
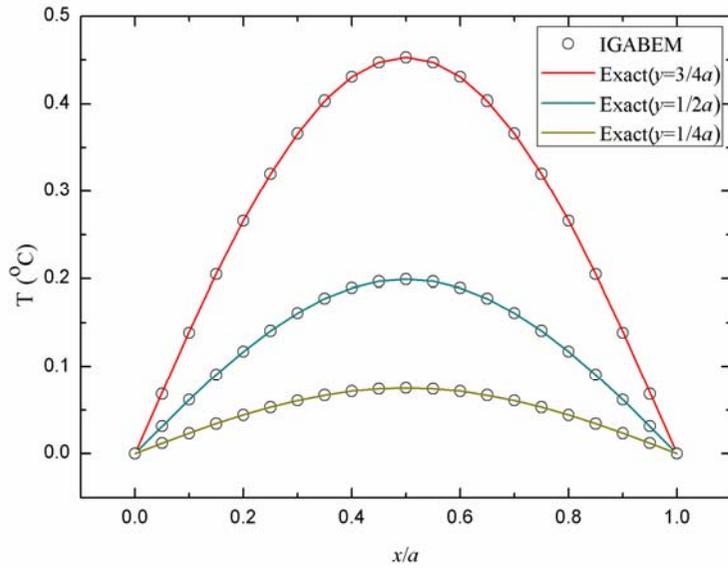
配点和单元



NURBS基函数



# 算例分析与讨论 • 等几何边界元法求解温度场问题



解析解与数值解的比较

IGABEM

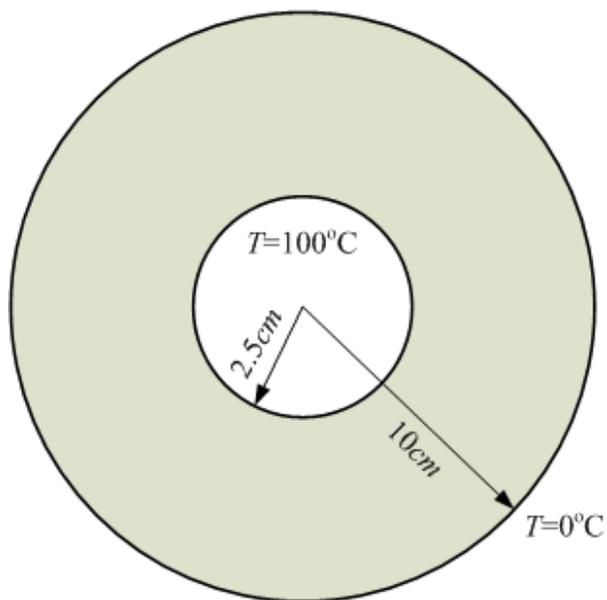
解析解



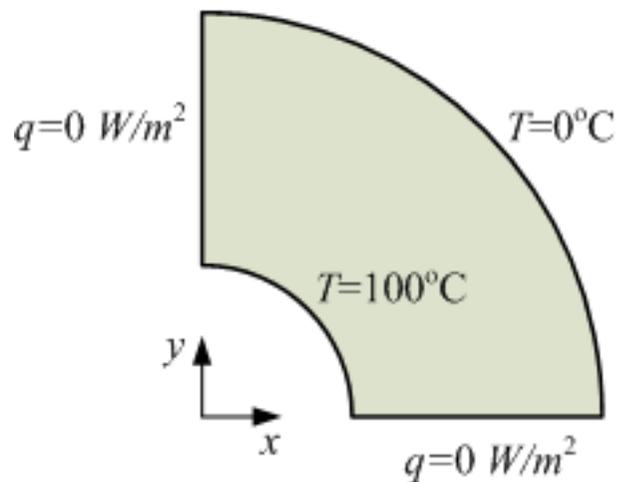
## 算例分析与讨论 • 等几何边界元法求解温度场问题

### ● 圆环问题

外半径为10cm，内半径为2.5cm的圆环，外部圆边界温度为 $0^{\circ}\text{C}$ ，内部圆边界温度为100摄氏度，求内部温度分布。



初始几何模型



取对称性后的模型

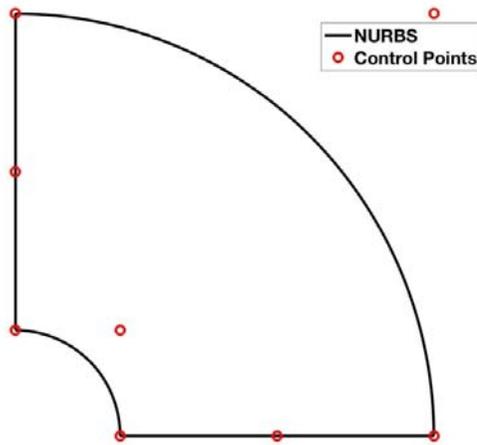


# 算例分析与讨论 • 等几何边界元法求解温度场问题

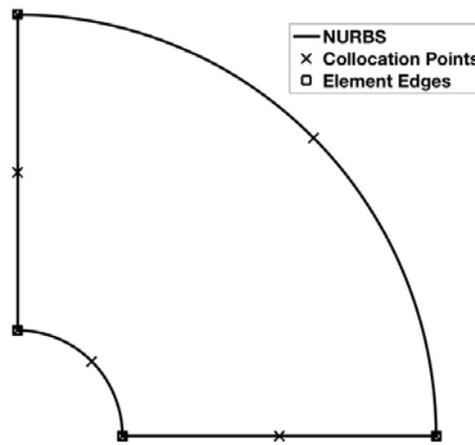
几何模型的初始节点向量及权系数为

$$k = \{0, 0, 0, 1/4, 1/4, 2/4, 2/4, 3/4, 3/4, 1, 1, 1\}$$

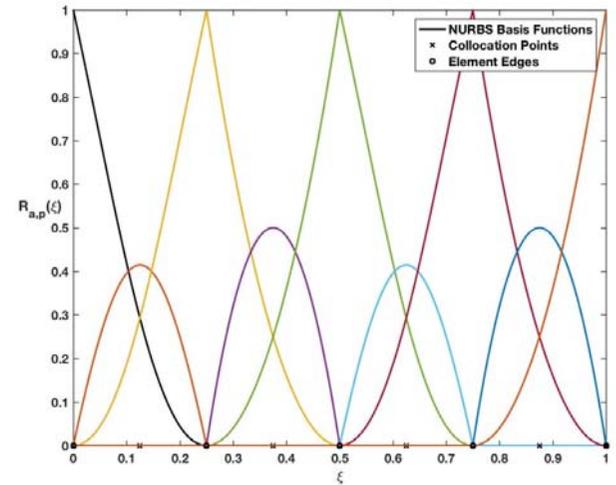
$$w = \{1, 1/\sqrt{2}, 1, 1, 1, 1/\sqrt{2}, 1, 1, 1\}$$



控制节点



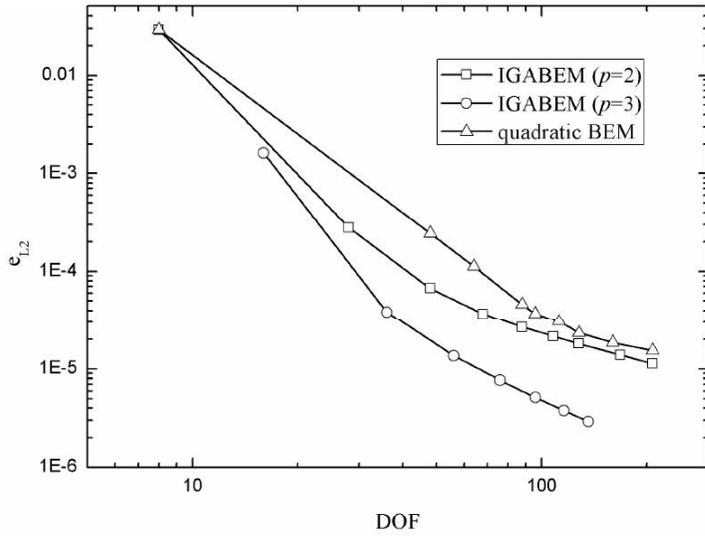
配点和单元



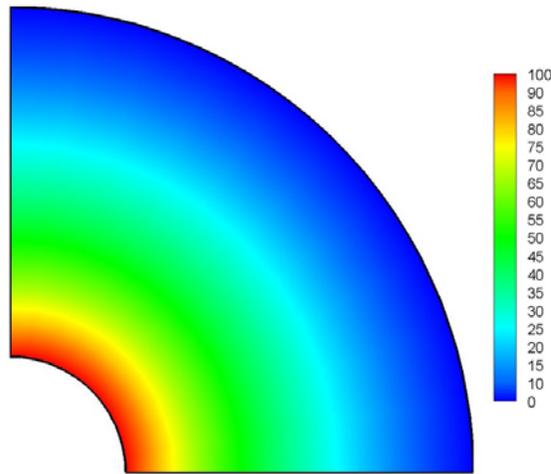
NURBS基函数



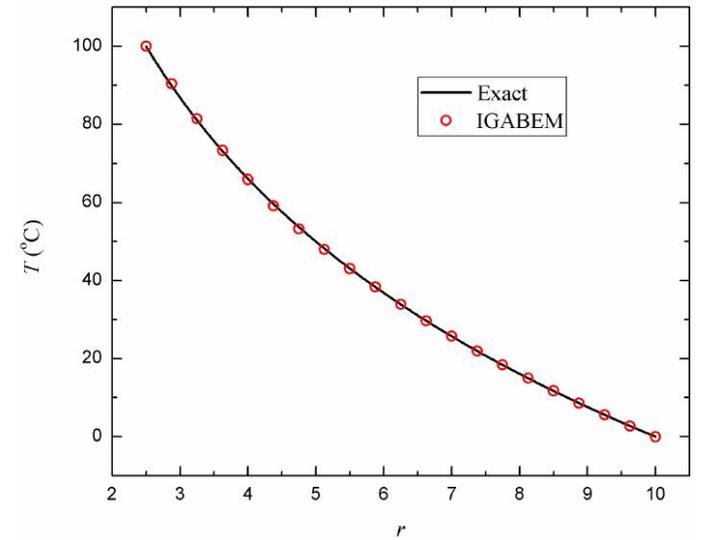
# 算例分析与讨论 • 等几何边界元法求解温度场问题



对于1/4圆环整个边界的L2误差



温度分布



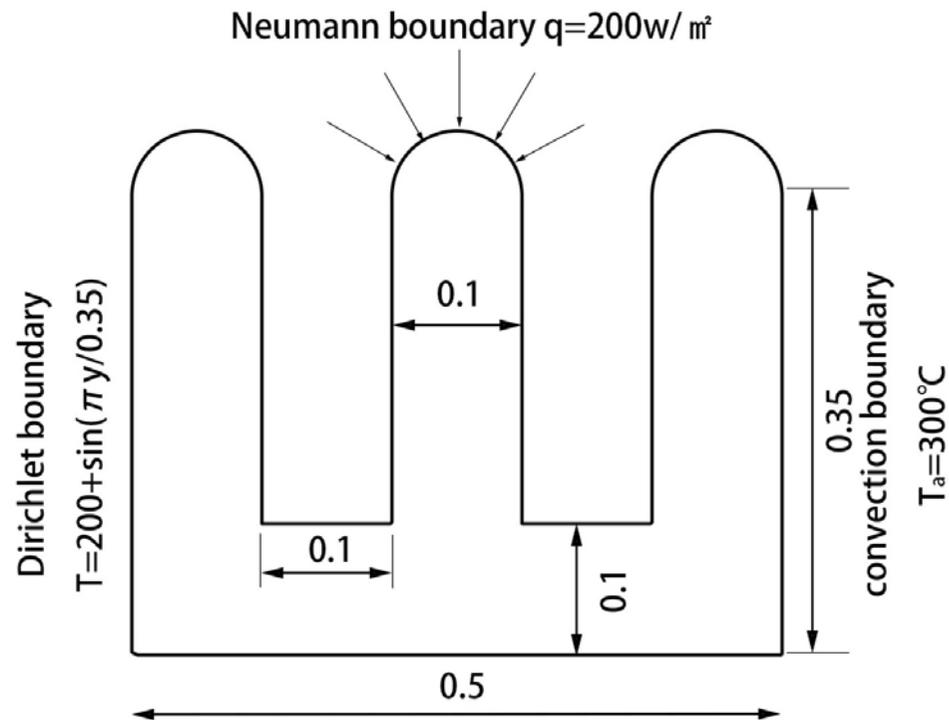
解析解与数值解的比较



## 算例分析与讨论 • 等几何边界元法求解温度场问题

### ● 复杂边界问题

边界条件如图所示，最左侧边界为第一类边界条件，是一个分布函数，中间圆弧边为第二类边界条件，最右侧边界为第三类边界条件，其余边界为绝热边界。





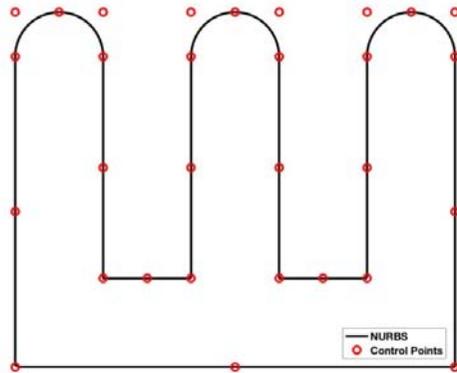
# 算例分析与讨论 • 等几何边界元法求解温度场问题

节点向量:

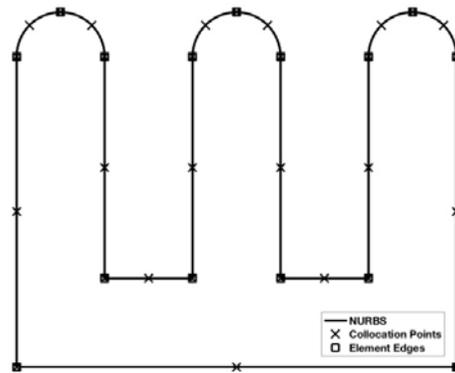
$k=\{0, 0, 0, 1/15, 1/15, 2/15, 2/15, 3/15, 3/15, 4/15, 4/15, 5/15, 5/15, 6/15, 6/15, 7/15, 7/15, 8/15, 8/15, 9/15, 9/15, 10/15, 10/15, 11/15, 11/15, 12/15, 12/15, 13/15, 13/15, 14/15, 14/15, 1, 1, 1\}$

权因子:

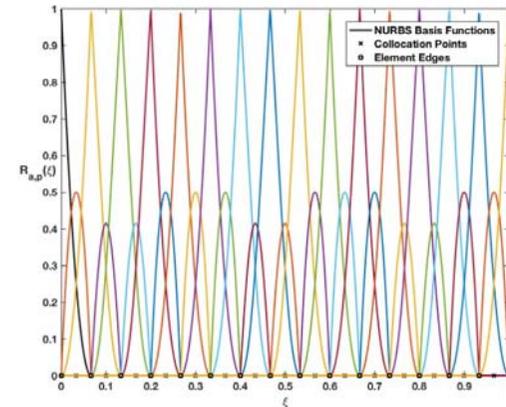
$w=\{1, 1, 1, 1/\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1/\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1/\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}, 1, 1, 1, 1, 1\}$



控制节点



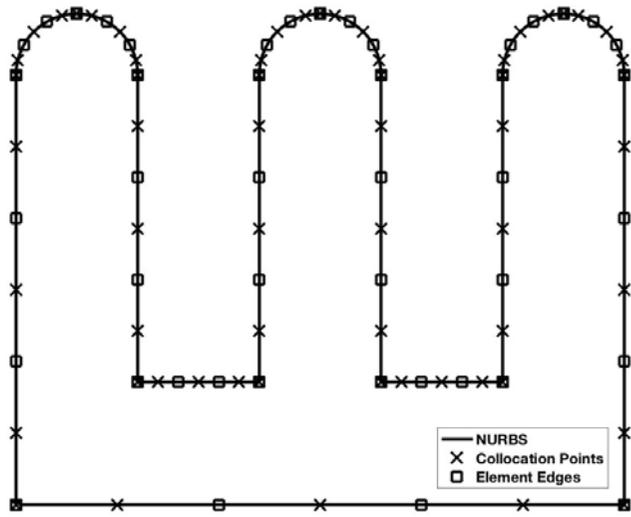
配点和单元



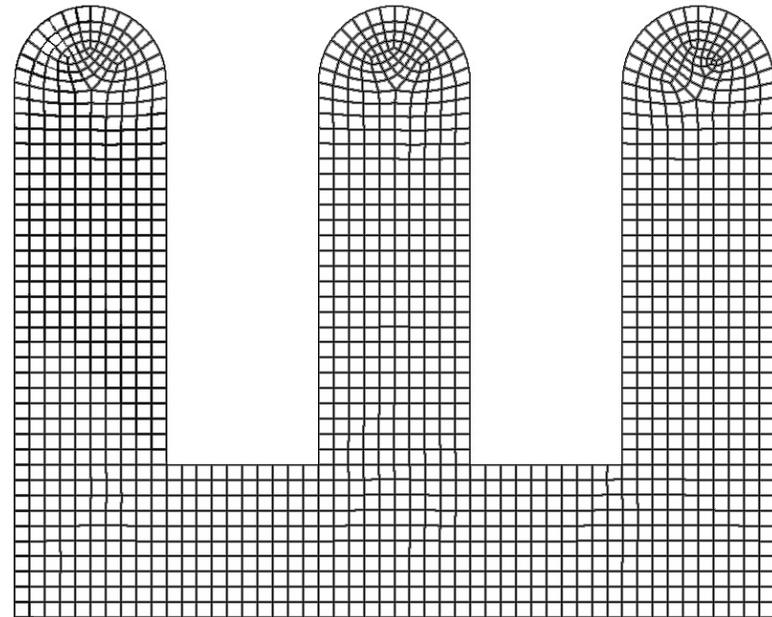
NURBS基函数



# 算例分析与讨论 • 等几何边界元法求解温度场问题



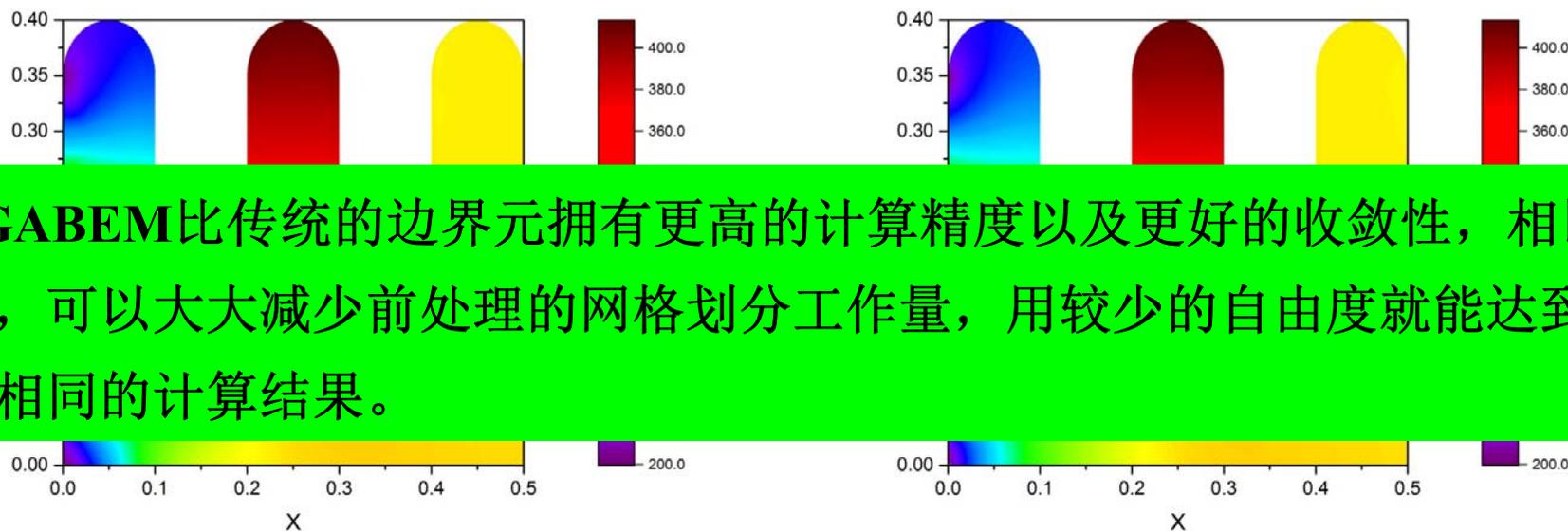
细化后的网格与配点



用于有限元求解的网格



## 算例分析与讨论 • 等几何边界元法求解温度场问题



**IGABEM**比传统的边界元拥有更高的计算精度以及更好的收敛性，相比于有限元，可以大大减少前处理的网格划分工作量，用较少的自由度就能达到与有限元相同的计算结果。

IGABEM

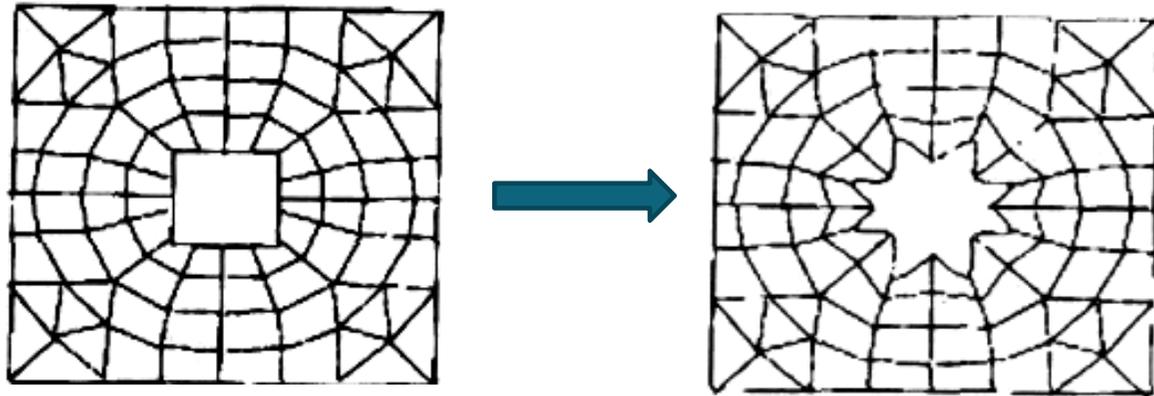
FEM

## 4.结构形状优化 的 等几何边界元法



## 问题的提出

形状优化是通过优化结构的几何外形，使其具有更好的力学特性。传统形状优化通常采用有限元法进行结构响应分析。基于有限元法的形状优化，每次迭代的过程中设计模型和计算模型间需要进行转换，大大地降低了优化效率，且存在一定的转换误差。另外，基于有限元法优化后的边界形状呈现锯齿状，需要进行边界光滑处理才能用于设计。





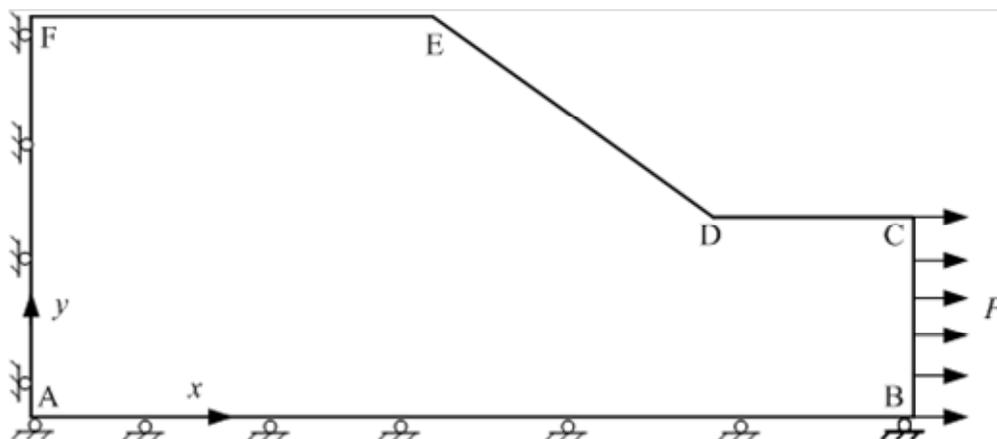
## 问题的提出

等几何边界元法不仅能精确地描述几何边界，且几何设计、仿真分析和形状优化采用统一的数学描述即**NURBS**，从而避免了重复地划分网格和优化中的网格畸变问题，提高设计、仿真和优化效率；**优化后的边界是光滑的。**

## 算例分析与讨论 • 算例一

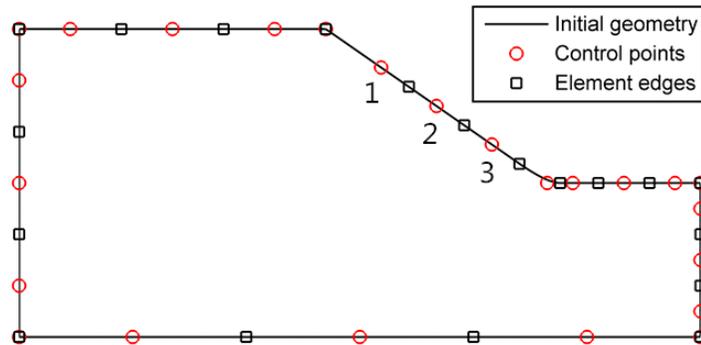
### ● 机械零件的优化

下图为某机械零件示意图，由于结构的对称性，只取一半分析。几何参数如下：AB=20 单位，BC=CD=4.5 单位，AF=FE=9 单位，且在 BC 段结构受到 x 方向  $P=100$  单位的均布力。材料参数如下：杨氏弹性模量  $E=10^7$  单位，泊松比  $\nu=0.3$ 。

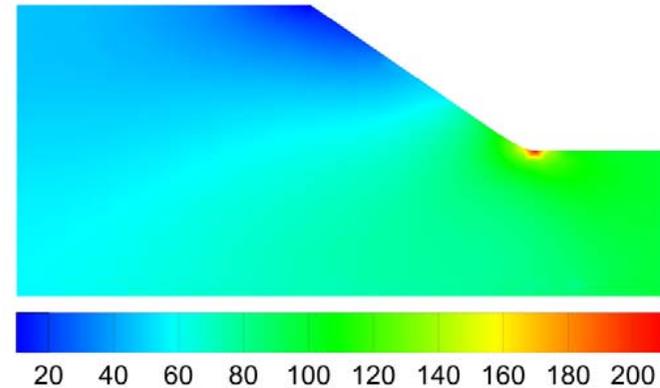




## 算例分析与讨论 • 算例一



初始网格

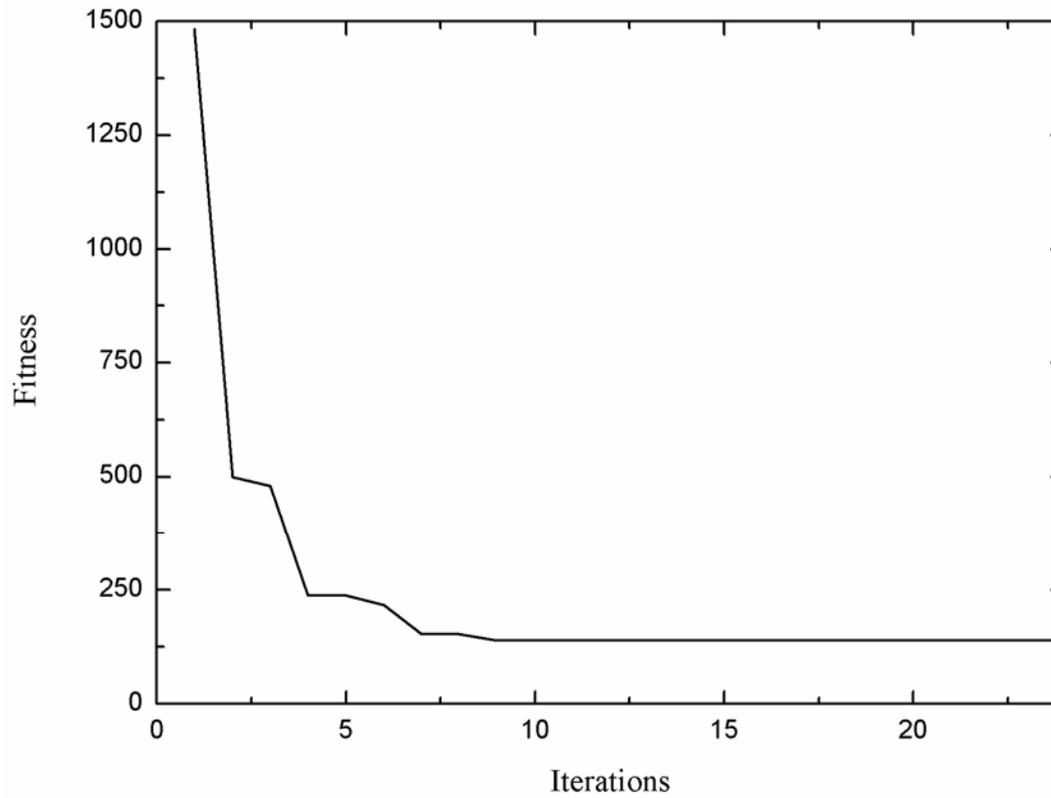


优化前Mises应力云图

结构优化前的应力集中出现在 D 点，最大 von Mises 应力为 208.16。优化的目标是让整个结构的面积最小，同时保证 CD 段最大 von Mises 应力不超过许用应力，许用应力大小为 125。图中编号为 1、2、3 的控制点的竖坐标为设计变量，横坐标值不变。设计变量的取值下限为 4.5，取值上限为 9。优化算法采用粒子群优化算法(PSO)。



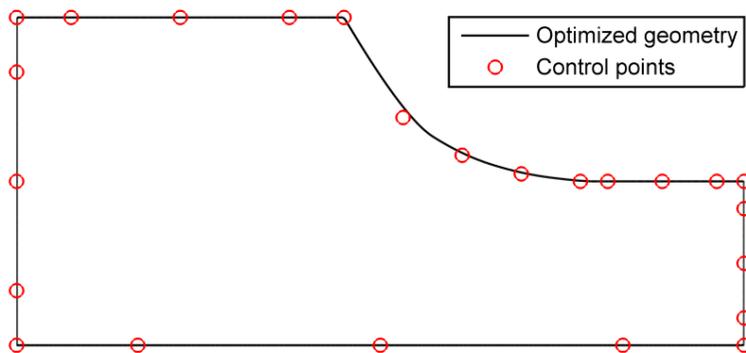
# 算例分析与讨论 • 算例一



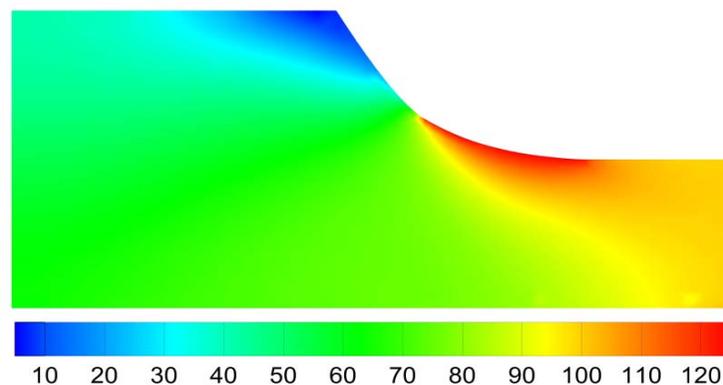
优化迭代过程



## 算例分析与讨论 • 算例一



优化后网格



优化后Mises应力云图

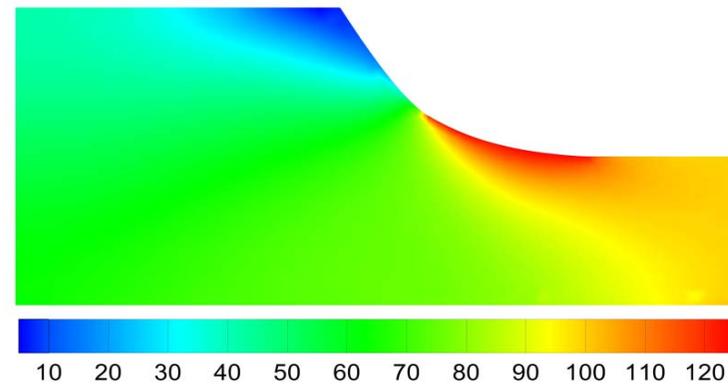
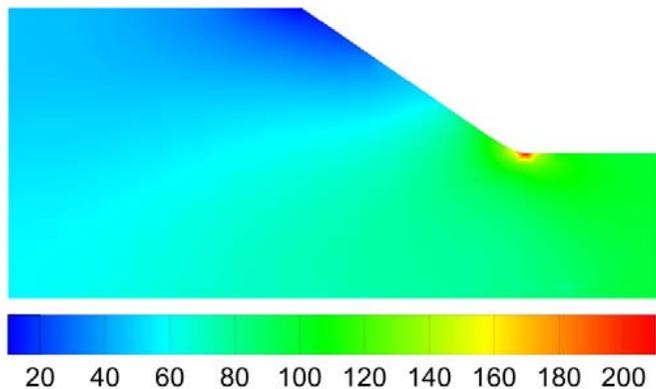
优化前后设计变量的变化

| 设计变量 | 下限  | 上限 | 初始值   | 优化后(PSO) | 优化后 (MMA) |
|------|-----|----|-------|----------|-----------|
| 1    | 4.5 | 9  | 7.875 | 6.2517   | 6.0814    |
| 2    | 4.5 | 9  | 6.75  | 5.2158   | 5.1486    |
| 3    | 4.5 | 9  | 5.625 | 4.7057   | 4.6895    |



## 算例分析与讨论 • 算例一

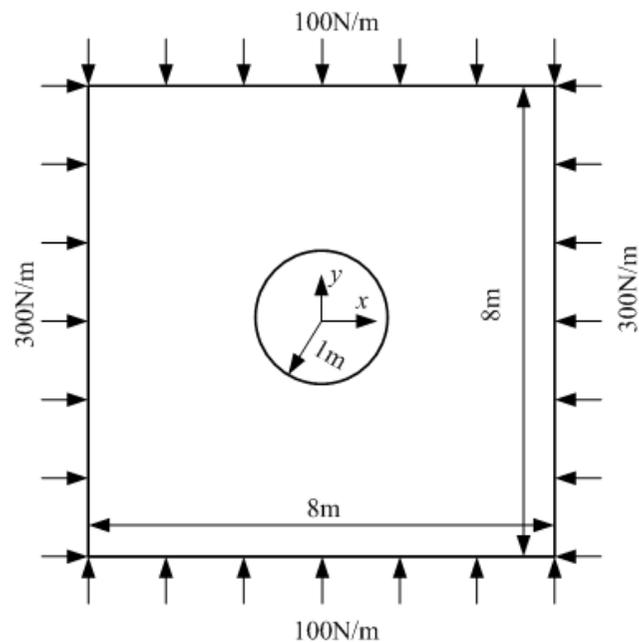
结构初始面积为 145.1602，优化后面积减为 138.7947，且优化边界光滑。由结构优化后的 Von Mises 云图可知，在优化边界应力均匀过渡，没有出现明显的应力集中现象。优化结果和基于 IGABEM 和 MMA 的优化结果做了对比，两种方法的优化结果具有良好的一致性。需要指出的是，MMA 是一种基于梯度的优化算法，本文所采用的粒子群优化算法是一种智能优化算法，无需敏感性分析，实现过程简单、方便。



## 算例分析与讨论 • 算例二

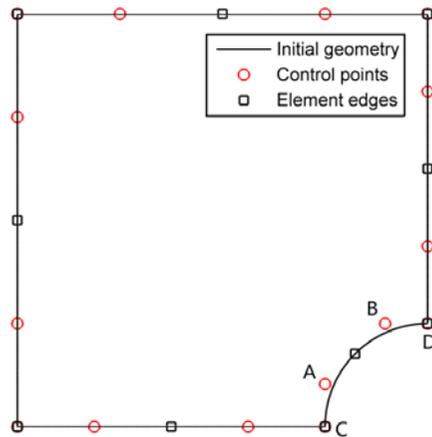
### ● 含孔方板的优化

如图为一内部含圆形孔的方板，杨氏弹性模量  $E = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ ，泊松比  $\nu = 0.3$ 。由于结构几何和受力的对称性，在以下的优化过程中只取 1/4 结构进行分析。

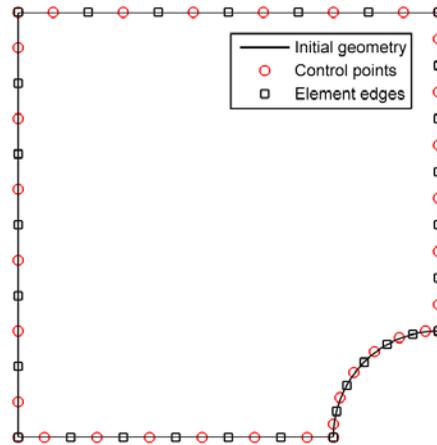




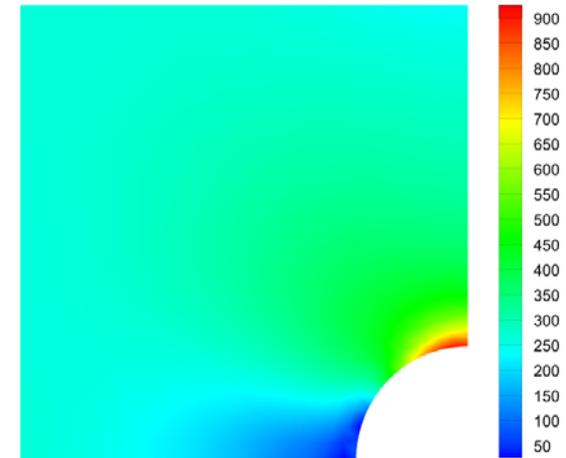
## 算例分析与讨论 • 算例二



初始网格



分析网格

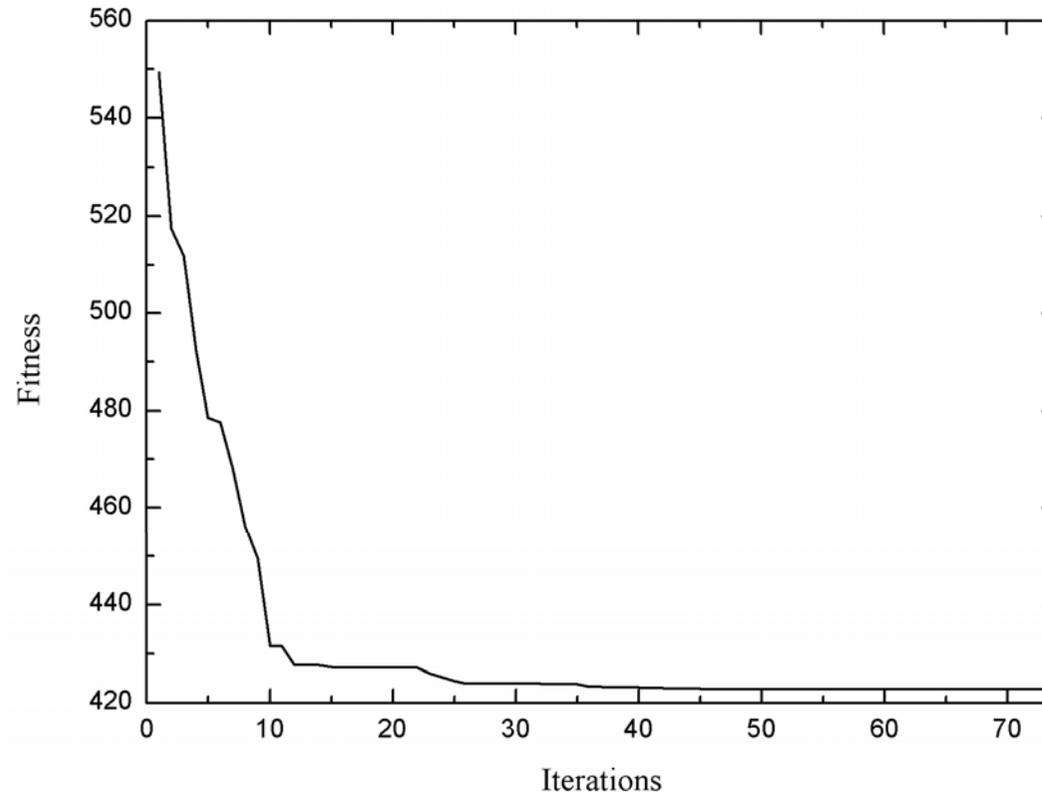


优化前Mises应力云图

在初始设计网格的基础进一步细化得到分析网格，分析网格用于优化过程中的结构分析，具有更高的计算精度。结构优化前的应力集中现象出现在圆孔内边界，最大应力值为921.4Pa。本例优化的目标是让边界上的最大Mises应力最小化，同时保证圆孔面积不变小，优化的设计变量为控制点A、B、C的横坐标和控制点A、B、D点的竖坐标。优化算法采用粒子群优化算法(PSO)。



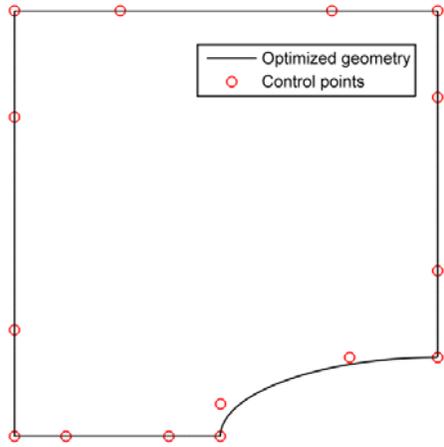
## 算例分析与讨论 • 算例二



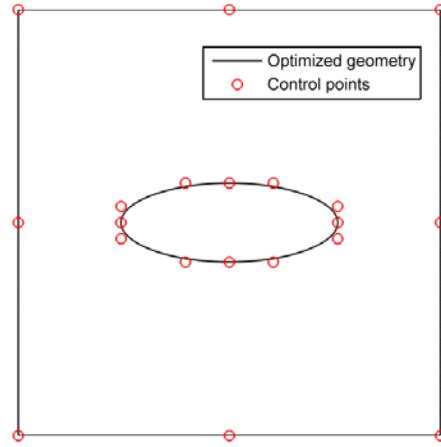
优化迭代过程



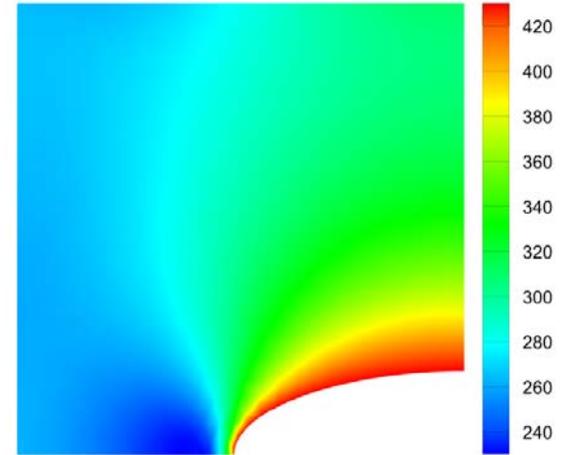
## 算例分析与讨论 • 算例二



优化后1/4结构网格



优化后整体结构网格



优化后Mises应力云图

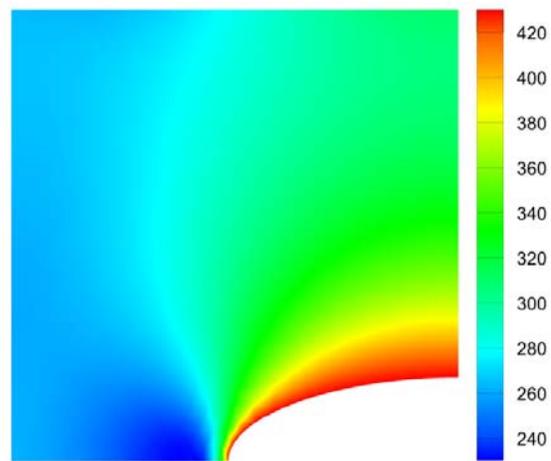
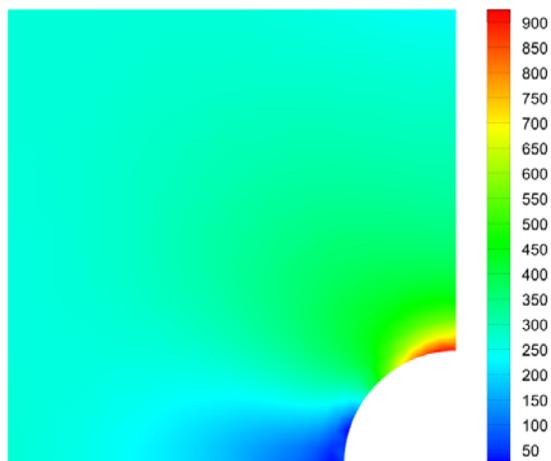
设计变量优化前后的变化

| 设计变量   | 下限     | 上限    | 初始值          | 优化后 (PSO)          |
|--------|--------|-------|--------------|--------------------|
| A      | (-4,0) | (0,4) | (-1, 0.4142) | (-2.0523 , 0.3046) |
| B      | (-4,0) | (0,4) | (-0.4142,1)  | (-0.8322 , 0.7422) |
| C 点横坐标 | -4     | 0     | -1           | -2.0546            |
| D 点竖坐标 | 0      | 4     | 1            | 0.7416             |



## 算例分析与讨论 • 算例二

含孔方板经过优化后，孔形由圆形变为椭圆形，与解析解结果一致。结构优化后的最大von Mises应力由优化前的921.4Pa减为439.7Pa，孔形内部应力集中现象明显减弱。





## 算例分析与讨论

### ● 结论

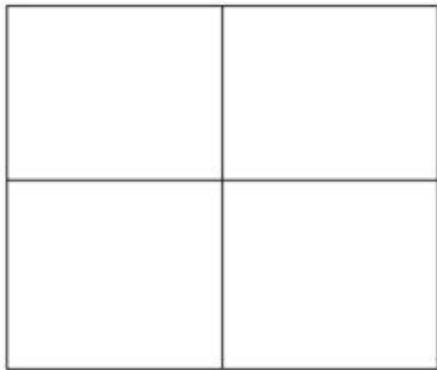
- 利用NURBS基函数精确地描述几何边界，统一了设计模型、分析模型和优化模型；
- 采用边界积分法进行物理求解，无需离散结构内部区域，可有效地解决目前等几何分析难由边/面生成体单元的瓶颈问题；
- 以边界上的控制点为设计变量，优化后的边界是光滑的，可直接用于设计；
- 粒子群优化算法属于无梯度的优化算法，能避免复杂的敏感性分析，使优化的实现更为简便。

**5.基于LR B-splines  
的平面弹性体  
的自适应多片等几何分析**

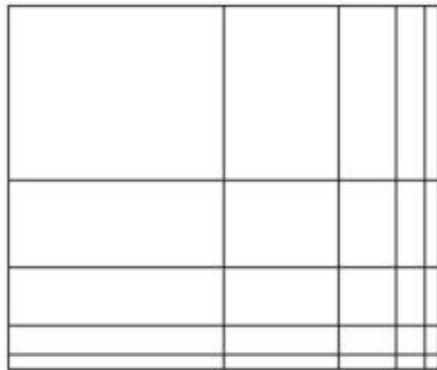


## 问题的提出

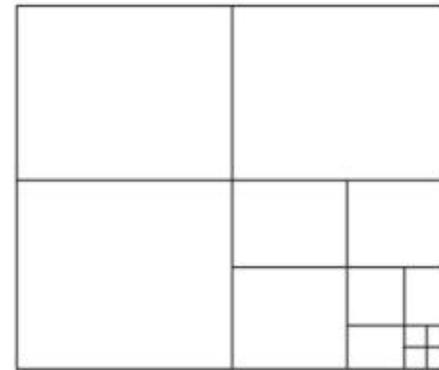
等几何分析中常用的样条是B-splines和NURBS，但是B-splines和NURBS具有张量性，局部细分非常困难。



初始网格



张量样条细分



局部细分

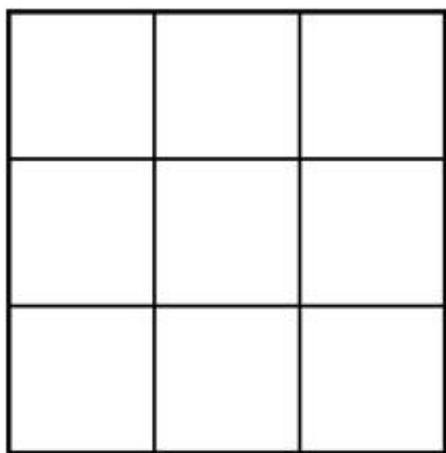


## 问题的提出

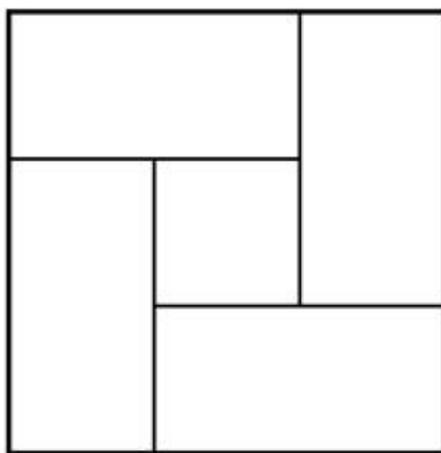
为了实现网格的局部细分，很多研究者在B-splines和NURBS基础上，得出了能实现局部细分的样条，如T样条，PHT样条，THB样条，LR B-splines等。LR B-splines是在B-splines和NURBS基础上发展而来，故LR B-splines具有B-splines和NURBS特性，如高阶连续性等。由于**LR B-splines能够实现局部细分，基于LR B-splines可以实现自适应IGA分析。**

## 基本理论 • LR B-splines的简介

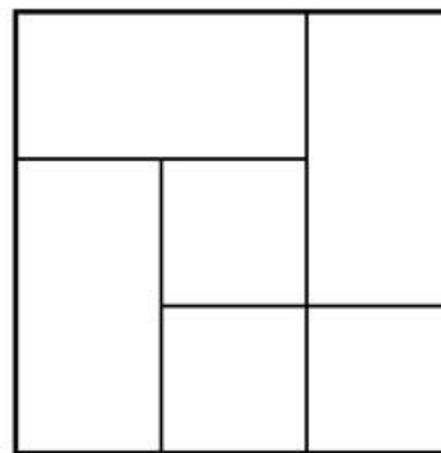
**LR B-splines**是定义在**LR mesh**上的，**LR mesh**是由**Tensor mesh**经过**LR B-splines**细分得到的，并且每一次细分产生的网格都是**Box mesh**。**Box mesh**是2维矩形中插入水平线或垂直线得到的。**Box mesh**，**Tensor mesh**和**LR mesh**如图所示。



Tensor mesh



Box mesh, not LR mesh



LR mesh and Box mesh



# 基本理论 • LR B-splines的局部细分

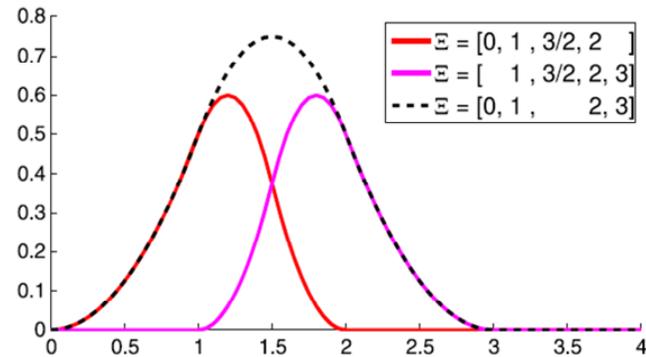
由于 LR B-splines 是由 B-splines 或 NURBS 得来，故 LR B-splines 的细分方法是参照 B-splines 或 NURBS 的全局 h 细分。对于局部节点向量  $\mathbf{E} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+2}\}$ ，在节点  $\xi_{i-1}$  和  $\xi_i$  中插入  $\bar{\xi}$ ，则有

$$B_E(\xi) = \alpha_1 B_{E_1}(\xi) + \alpha_2 B_{E_2}(\xi)$$

其中  $E_1 = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \bar{\xi}, \xi_i, \dots, \xi_{p+1}\}$ ， $E_2 = \{\xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \bar{\xi}, \xi_i, \dots, \xi_{p+2}\}$

$$\alpha_1 = \begin{cases} 1 & \xi_{p+1} \leq \xi \leq \xi_{p+2} \\ \frac{\xi - \xi_1}{\xi_{p+1} - \xi_1} & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_{p+1} \end{cases}, \quad \alpha_2 = \begin{cases} \frac{\xi_{p+2} - \xi}{\xi_{p+2} - \xi_2} & \xi_2 \leq \xi \leq \xi_{p+2} \\ 1 & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \end{cases}$$

例如，局部节点向量  $\mathbf{E} = [0, 1, 2, 3]$ ，插入节点  $\bar{\xi} = \frac{3}{2}$ ，则  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{4}$ 。如图所示，从图中可以看出，LR B-splines基函数总和没有发生改变，所以细分过程中几何形状不发生改变。





## 基本理论 • LR B-splines的局部细分

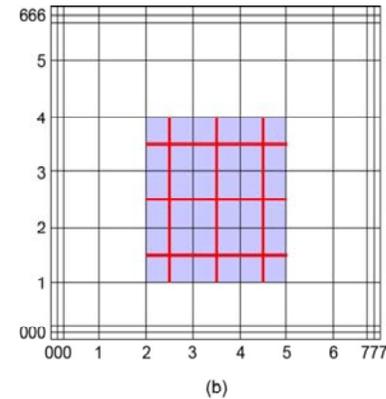
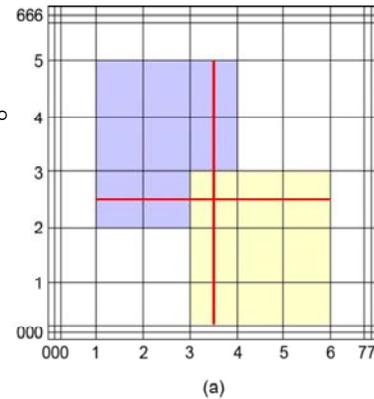
对于 2 维加权 LR B-splines 基函数  $B_{E,H}^{\gamma}(\xi,\eta)=\gamma B_E(\xi)B_H(\eta)$ ，细分时先在一个参数方向进行，然后再细分另一个方向。细分一个参数方向如下

$$B_{E,H}^{\gamma}(\xi,\eta)=\gamma B_E(\xi)B_H(\eta)=\gamma(\alpha_1 B_{E_1}(\xi)+\alpha_2 B_{E_2}(\xi))B_H(\eta)=B_{E_1,H}^{\gamma_1}(\xi,\eta)+B_{E_2,H}^{\gamma_2}(\xi,\eta)$$

另一个参数方向的细分也是类似。

LR B-splines 的局部细分策略有 3 种，分别是 Full span, Minimum span 和 Structured mesh。常用的网格细分策略是 Full span 和 Structured mesh。

Full span 细分策略的对象是网格单元，对该网格单元上所有不为 0 的 LR B-splines 基函数



进行细分，如图(a)所示。Structured mesh 细分策略的对象是 LR B-splines 基函数，对该 LR B-splines 基函数所在的不为 0 的网格单元进行细分，如图(b)所示。Structured mesh 细分策略得到的 LR B-splines 基函数是线性独立的，我们文中采用的就是该细分策略。为了控制自适应等几何 LR B-splines 基函数增长速率，需要先定义一个自适应等几何参数  $\beta$ 。



## 基本理论 • 应力恢复和误差

为了实现基于 LR B-splines 的自适应等几何分析，需要先获得后验误差估计。本文后验误差估计是根据 Zienkiewicz–Zhu (Z–Z) 误差估计思想，通过应力场恢复来定义的。应力场恢复是根据等几何分析得到的应力近似，通过最小 2 乘拟合来计算的。应力场恢复定义如下

$$\sigma_*^m = \mathbf{R}_*^m \mathbf{c}_\sigma^m$$

其中，对于 2 维单元有

$$(\mathbf{R}_*^m)_e = \begin{bmatrix} R_1^m & 0 & 0 & R_2^m & 0 & 0 & L \\ 0 & R_1^m & 0 & 0 & R_2^m & 0 & L \\ 0 & 0 & R_1^m & 0 & 0 & R_2^m & L \end{bmatrix}$$

根据最小 2 乘拟合定义函数

$$H(\mathbf{c}_\sigma^m) = \sum_{k=1}^{N_{\text{total}}} (\sigma_*^m(\mathbf{x}_k) - \sigma_h^m(\mathbf{x}_k))^2$$

其中  $\mathbf{x}_k$  是超级收敛点。运用最小 2 乘拟合可得如下线性方程组

$$\mathbf{M}^m \mathbf{c}_\sigma^m = \mathbf{F}_\sigma^m$$

$$\mathbf{M}^m = \sum_{k=1}^{N_{\text{total}}} \left( (\mathbf{R}_*^m)_k \right)^T (\mathbf{R}_*^m)_k, \quad \mathbf{F}_\sigma^m = \sum_{k=1}^{N_{\text{total}}} \left( (\mathbf{R}_*^m)_k \right)^T \mathbf{D}^T \mathbf{B}_k^m \mathbf{a}^m$$



## 基本理论 • 应力恢复和误差

误差定义如下

$$\text{能量范数误差: } \|e\|_{E(\Omega)} = \|\sigma - \sigma_h\|_{E(\Omega)} = \sqrt{\sum_{m=1}^{N_{patch}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^m} (\sigma^m - \sigma_h^m)^T (\mathbf{D}^m)^{-1} (\sigma^m - \sigma_h^m) d\Omega}$$

相对能量范数误差:

$$\|e_r\|_{E(\Omega)} = \frac{\|\sigma - \sigma_h\|_{E(\Omega)}}{\|\sigma\|_{E(\Omega)}} = \frac{\sqrt{\sum_{m=1}^{N_{patch}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^m} (\sigma^m - \sigma_h^m)^T (\mathbf{D}^m)^{-1} (\sigma^m - \sigma_h^m) d\Omega}}{\sqrt{\sum_{m=1}^{N_{patch}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^m} (\sigma^m)^T (\mathbf{D}^m)^{-1} \sigma^m d\Omega}} \times 100\%$$

运用 Zienkiewicz–Zhu (Z–Z) 误差估计思想, 用应力恢复代替真实应力, 得到后验误差估计如下

$$\|e^*\|_{E(\Omega)} = \|\sigma_* - \sigma_h\|_{E(\Omega)} = \sqrt{\sum_{m=1}^{N_{patch}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^m} (\sigma_*^m - \sigma_h^m)^T (\mathbf{D}^m)^{-1} (\sigma_*^m - \sigma_h^m) d\Omega}$$

同理相对后验误差估计定义如下

$$\|e_r^*\|_{E(\Omega)} = \frac{\|\sigma_* - \sigma_h\|_{E(\Omega)}}{\|\sigma_*\|_{E(\Omega)}} = \frac{\sqrt{\sum_{m=1}^{N_{patch}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^m} (\sigma_*^m - \sigma_h^m)^T (\mathbf{D}^m)^{-1} (\sigma_*^m - \sigma_h^m) d\Omega}}{\sqrt{\sum_{m=1}^{N_{patch}} \frac{1}{2} \int_{\Omega^m} (\sigma_*^m)^T (\mathbf{D}^m)^{-1} (\sigma_*^m) d\Omega}} \times 100\%$$



## 算例分析与讨论 • 自适应多片等几何求平面问题

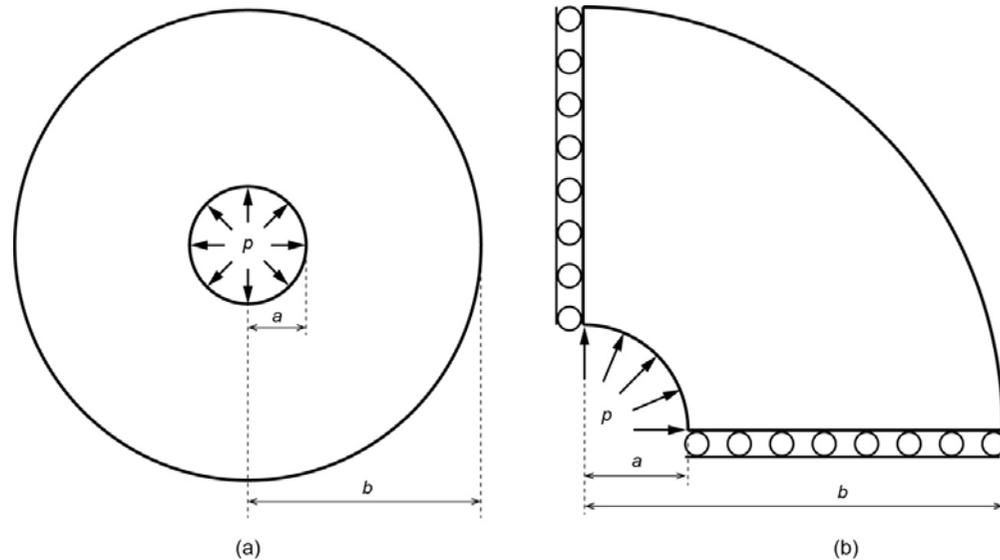
### ● 厚壁圆筒问题

厚壁圆筒内部受径向均匀荷载，如图(a)所示。圆筒的外部半径**b=20**单位，内部半径**a=5**单位。均匀荷载**p=1**单位。 Young's modulus  $E = 1000$  单位， Poisson's ratio  $\nu = 0.3$ 。根据对称性，取四分之一区域作为研究对象，如图(b)所示。自适应参数  $\beta = 5\%$

该问题的位移解析解如下

$$u_r = \frac{1+\nu}{E(c^2-1)}(r(1-2\nu) + b^2 r^{-1})$$

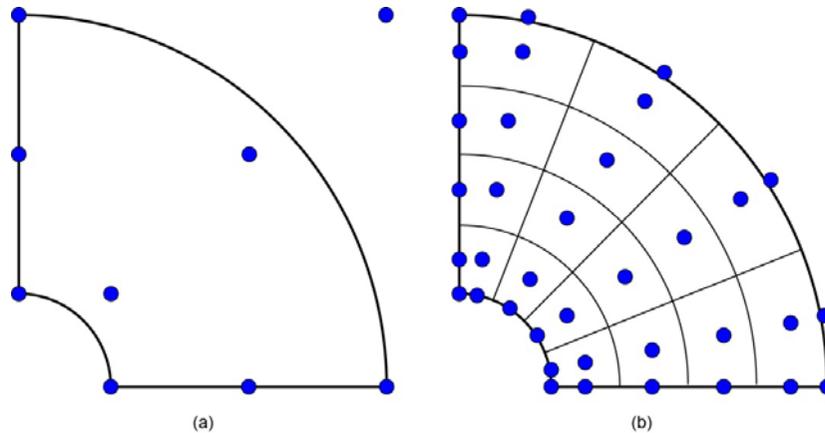
$$c = \frac{b}{a}$$



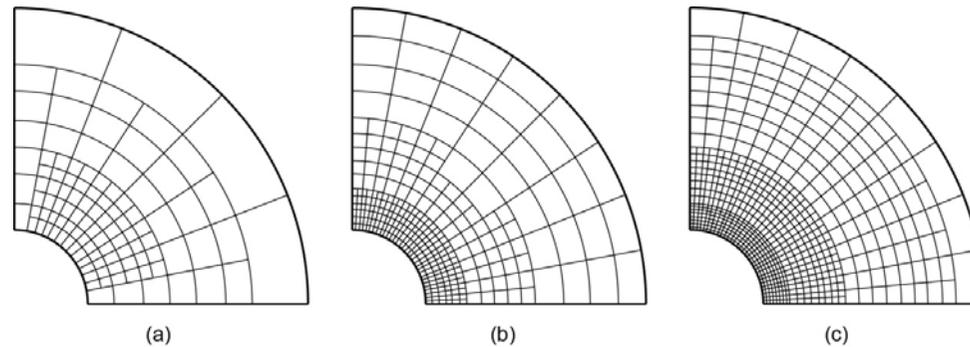


## 算例分析与讨论 • 自适应多片等几何求平面问题

2阶LR B-splines几何建模以及相应控制点，如图(a)所示。初始计算网格以及相应控制点，如图(b)所示



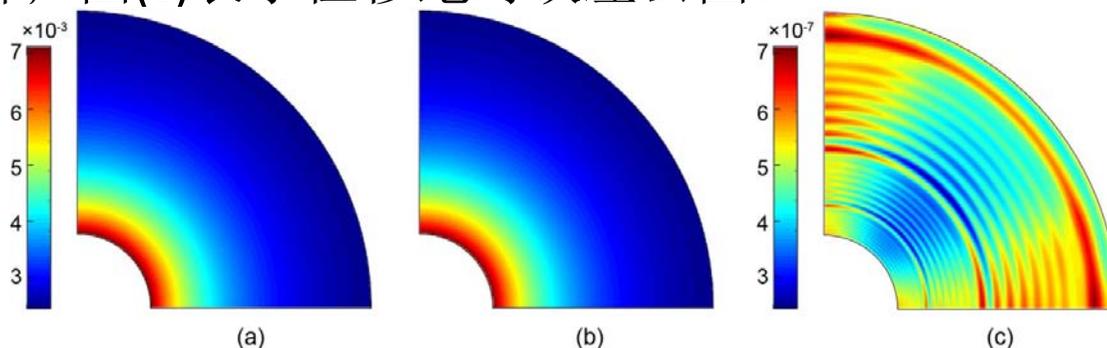
第2,4,6步自适应细分的网格如下图所示



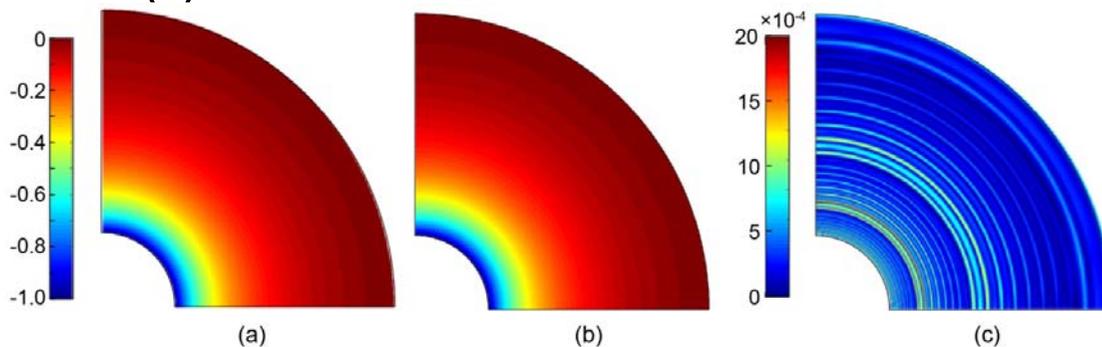


## 算例分析与讨论 • 自适应多片等几何求平面问题

径向位移云图如下图所示，图(a)表示自适应等几何位移近似解；图(b)表示解析位移解；图(c)表示位移绝对误差云图。



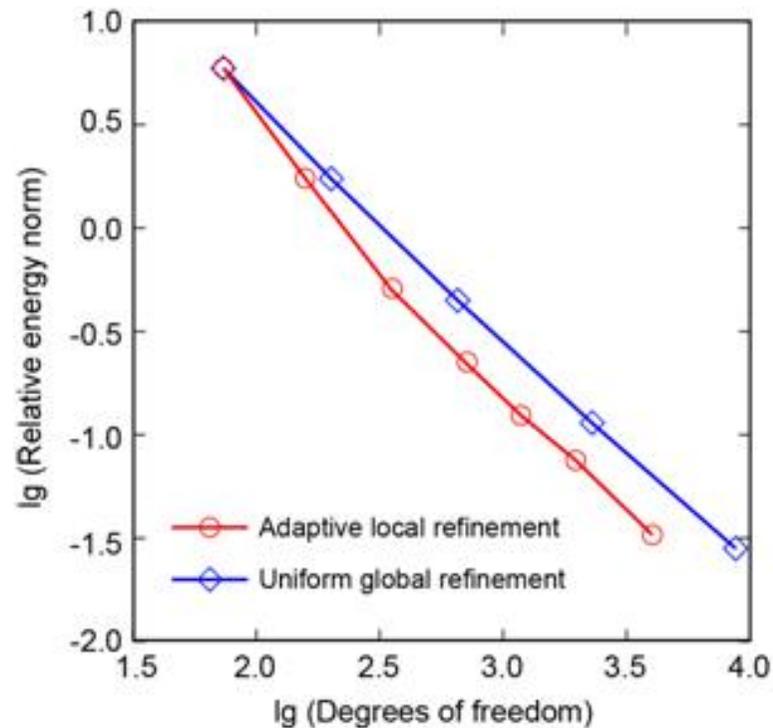
径向应力云图如下图所示，图(a)表示自适应等几何应力近似解；图(b)表示解析应力解；图(c)表示应力绝对误差云图。





## 算例分析与讨论 • 自适应多片等几何求平面问题

误差收敛曲线如下图所示，收敛曲线是在双对数下绘制的。从误差收敛曲线可知，**自适应细分误差收敛速度比全局细分收敛速度快。**





# 算例分析与讨论 • 自适应多片等几何求平面问题

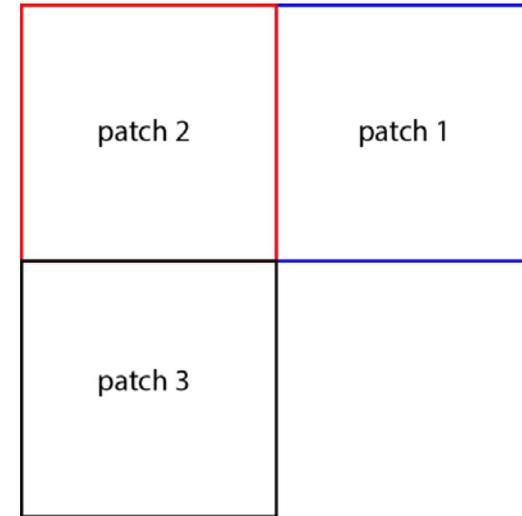
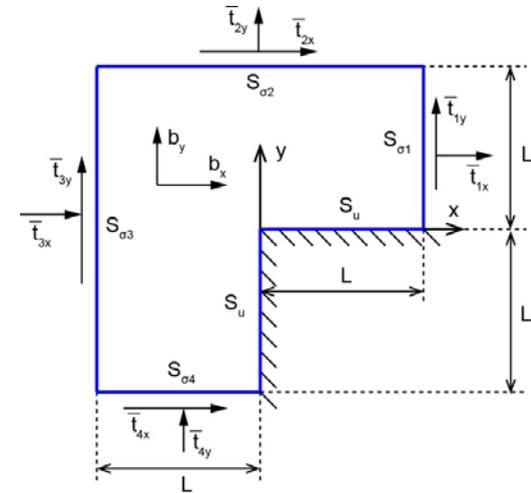
## ● L形状问题

问题区域是一个L形状，如图所示。  $L=1$  单位，Young's modulus  $E = 4 \times 10^7$  单位，Poisson's ratio  $\nu = 0.25$ 。自适应参数  $\beta = 5\%$

该问题的位移解析解如下

$$u_x = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) \quad u_y = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$$

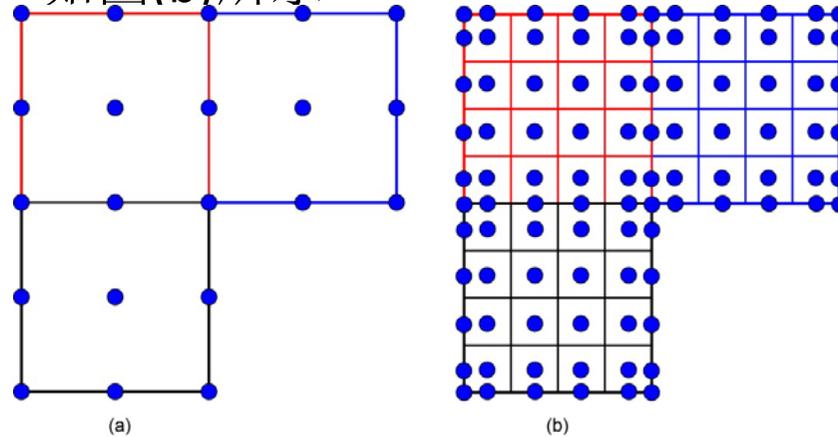
应力边界和位移边界条件可以根据位移解析解求得。该问题在原点应力具有奇异性。根据L形状，用3片等几何建模。



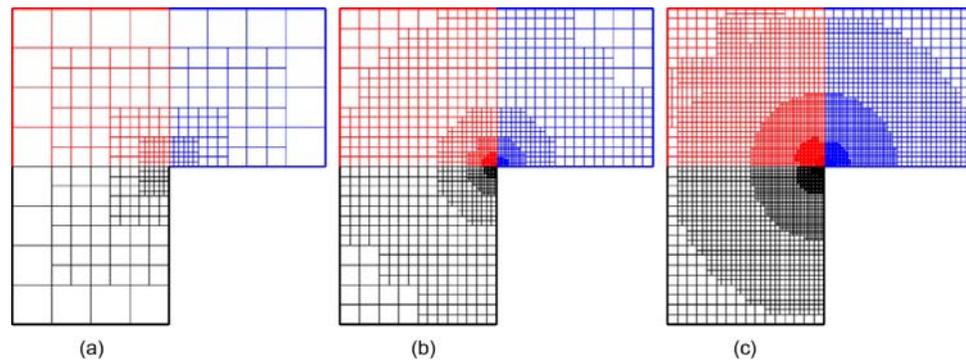


## 算例分析与讨论 • 自适应多片等几何求平面问题

2阶LR B-splines几何建模以及相应控制点，如图(a)所示。初始计算网格以及相应控制点，如图(b)所示



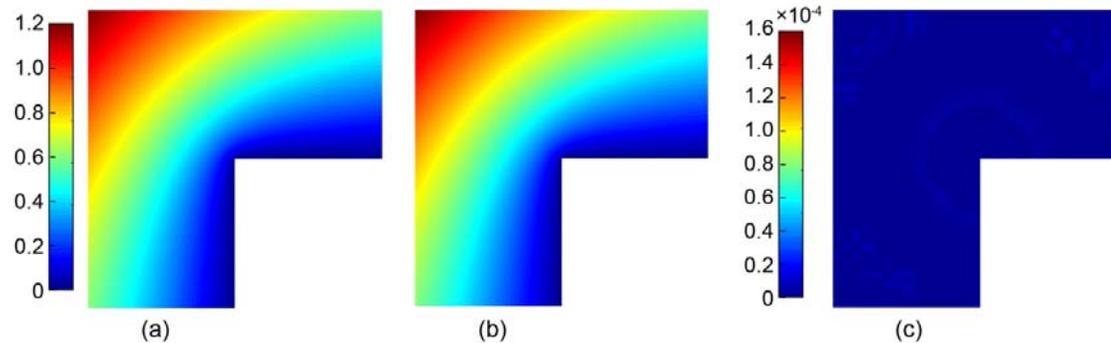
第5,15,21步自适应细分的网格如下图所示



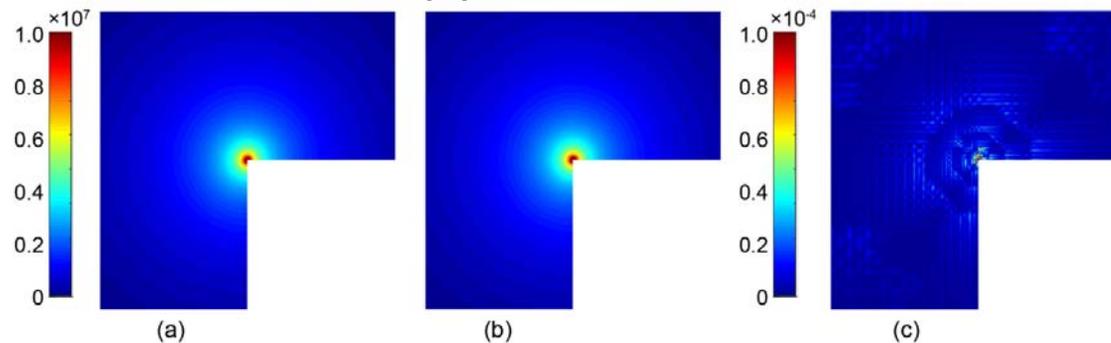


## 算例分析与讨论 • 自适应多片等几何求平面问题

水平方向位移云图如下图所示，图(a)表示自适应等几何位移近似解；图(b)表示真实位移解；图(c)表示位移绝对误差云图。



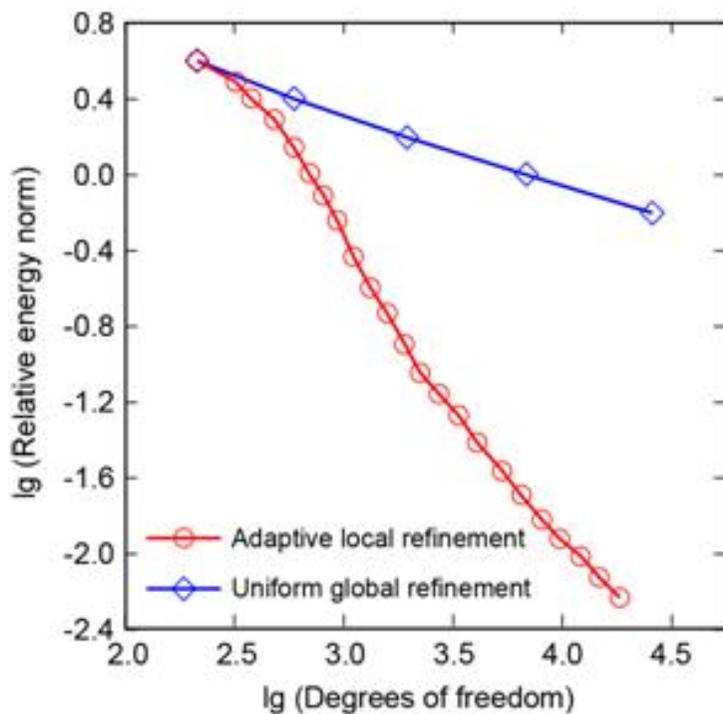
Mises应力云图如下图所示，图(a)表示自适应等几何Mises应力近似解；图(b)表示真实Mises应力解；图(c)表示Mises应力绝对误差云图。





## 算例分析与讨论 • 自适应多片等几何求平面问题

误差收敛曲线如下图所示，收敛曲线是在双对数下绘制的。从误差收敛曲线可知，**自适应细分误差收敛速度比全局细分收敛速度快。**





## 算例分析与讨论 • 自适应扩展等几何求平面夹杂问题

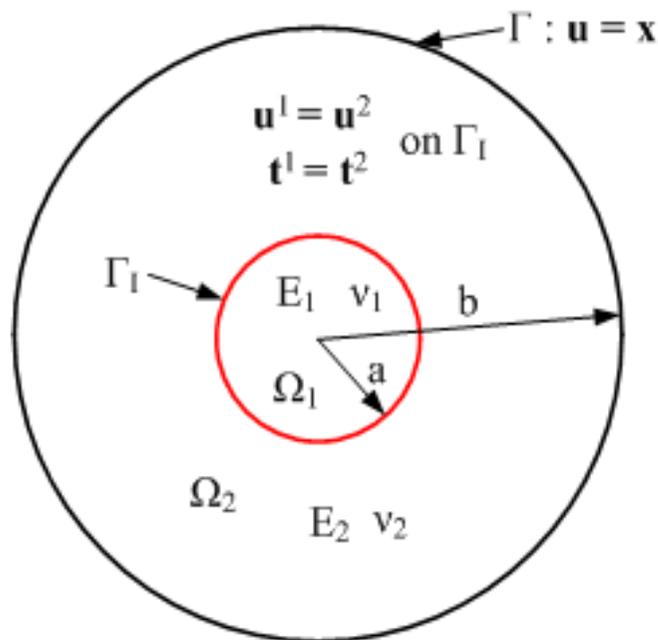
### ● 双材料边界值问题

双材料边界值问题，如图所示。 $a=0.4$ 单位， $b=2$ 单位。 $E_1=1$ ， $\nu_1=0.25$ 。  
 $E_2=10$ 单位， $\nu_2=0.3$ 。其中红色线表示夹杂面。自适应参数  $\beta = 20\%$

位移解析解如下

$$u_r(r) = \begin{cases} \left[ \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\beta + \frac{b^2}{a^2} \right] r, & 0 \leq r \leq a \\ \left( r - \frac{b^2}{r} \right) \beta + \frac{b^2}{r}, & a \leq r \leq b \end{cases}$$

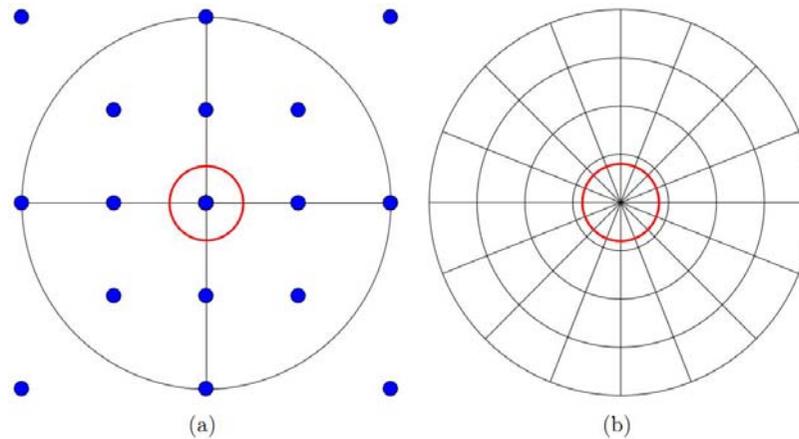
$$\beta = \frac{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)b^2}{(\lambda_2 + \mu_2)a^2 + (\lambda_1 + \mu_1)(b^2 - a^2) + \mu_2 b^2}$$



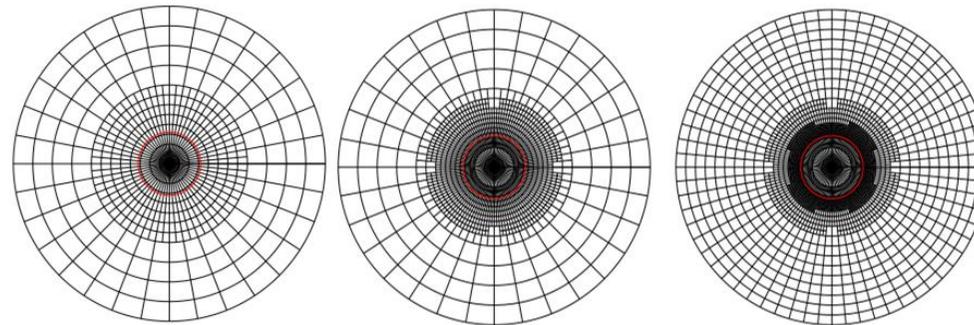


## 算例分析与讨论 • 自适应扩展等几何求平面夹杂问题

2阶LR B-splines几何建模以及相应控制点，如图(a)所示。初始计算网格，如图(b)所示



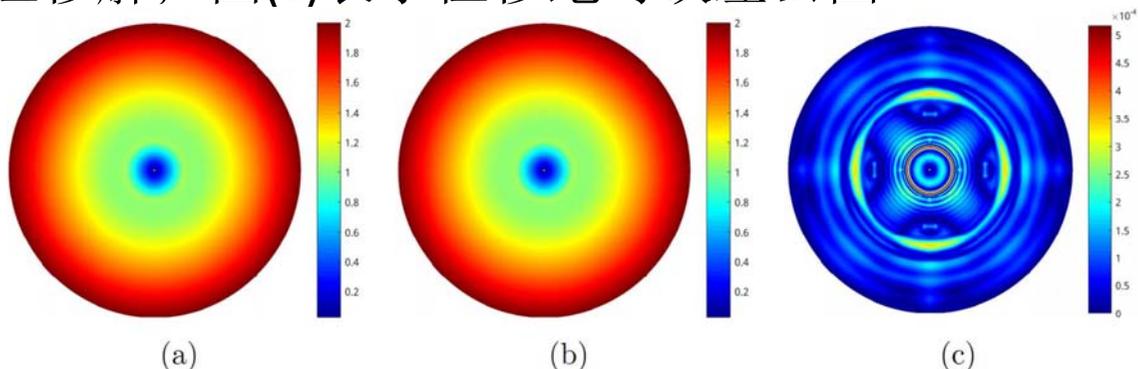
第2,3,4步自适应细分的网格如下图所示



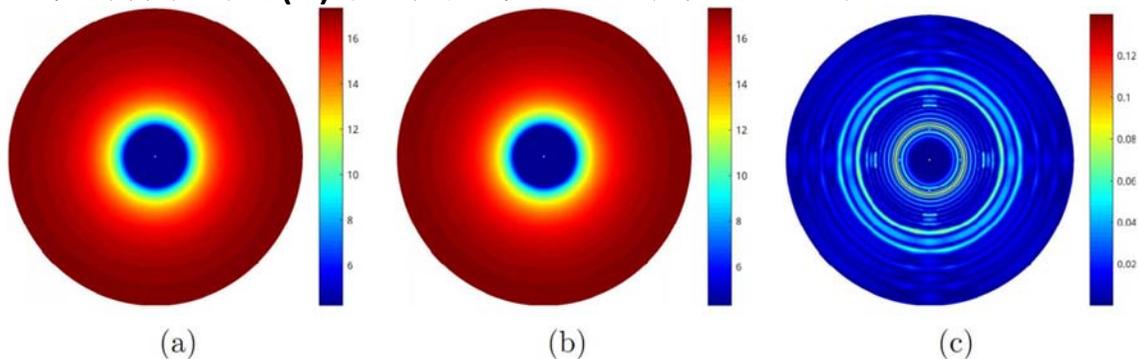


## 算例分析与讨论 • 自适应扩展等几何求平面夹杂问题

径向位移云图如下图所示，图(a)表示自适应扩展等几何位移近似解；图(b)表示真实位移解；图(c)表示位移绝对误差云图。



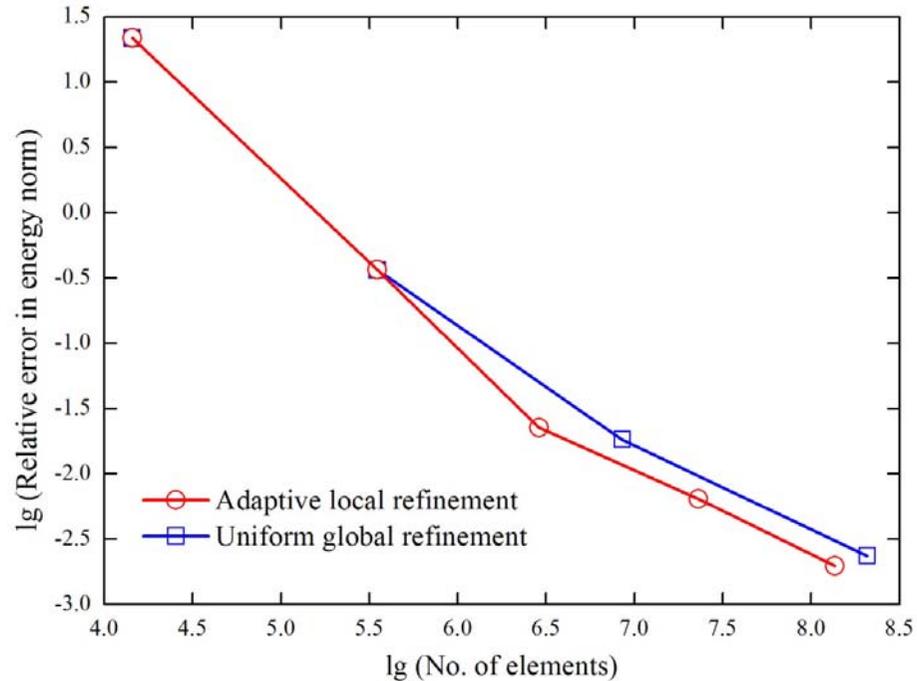
径向应力云图如下图所示，图(a)表示自适应扩展等几何应力近似解；图(b)表示真实应力解；图(c)表示应力绝对误差云图。





## 算例分析与讨论 • 自适应扩展等几何求平面夹杂问题

误差收敛曲线如下图所示，收敛曲线是在双对数下绘制的。从误差收敛曲线可知，**自适应细分误差收敛速度比全局细分收敛速度快。**



A faint, light gray world map is visible in the background, centered behind the text. The map shows the outlines of continents and oceans.

## **6.基于扩展等几何分析 和混沌粒子群算法的带孔结构形 状优化设计**



## 问题的提出

(1) 带孔结构形状优化是常见的工程应用问题之一。结构形状优化的主要目的是通过改变结构几何边界或孔轮廓来改善结构特性。

(2) 它的设计过程集成了几何建模 (**CAD**)、结构分析(**CAE**)和优化算法。

## 问题的提出 • CAD和CAE方法选取

几何设计模型(CAD)和分析模型(CAE)属于不同的数学定式，这导致了CAD并不能直接用于CAE中；优化过程中，CAD和CAE频繁的数据交互不仅耗时，还使得累计误差增大，最终影响了优化模型的实用性。

**XIGA结合了等几何分析和扩展有限元的各自优势，既可以精确描述几何边界，又不需要费时的网格重构。因此，在带孔结构的形状优化方面，用XIGA作为结构的力学分析方法**

有限单元法  
(FEM)

等几何分析(IGA)

扩展等几何方法  
(XIGA)

优点：CAD和CAE采用统一的数学定式，实现对精确几何模型的分析，避免了CAD和CAE数据交互过程，**有利于结构优化设计。**

缺点：优化过程不能避免畸形单元的出现；NURBS基函数采用张量积形式，**针对含孔结构**，基本的等几何方法并不能灵活应用。

## 问题的提出 • 优化方法

常规的结构优化设计一般采用**基于灵敏度分析的移动渐进法(MMA)**，这类方法要求几何形体连续可微，且灵敏度推导过程复杂繁琐，其优化结果又高度依赖于初始值的选取。

针对**多极值的优化问题**，群智能算法作为启发式算法的一大类，极易陷入局部最优；因此，在选用粒子群算法的基础上，又引入了混沌扰动。

传统优化算法

群智能优化算法

混沌粒子群算法  
(CPSO)

**群智能优化算法**是由自然界一些群体生物自组织行为或物理现象设计出的随机搜索算法。这类算法有以下几个优势：①无需偏导数信息，有效避开了复杂结构灵敏度的繁琐推导；②它是根据适应度函数形成自反馈闭环系统的启发式算法，其优化结果与初始值关联度不高；③算法结构简单，易于集成化。

## 基本理论 • 优化问题描述

一般含约束优化问题可描述为：

$$\min_{x_k} f(\mathbf{x})$$

约束形式

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n_h$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, n_g$$

$$x_{k,\min} \leq x_k \leq x_{k,\max} \quad k=1, 2, \dots, n_x$$

适应度函数

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \left[ \sum \zeta_j \max(0, g_j) + \sum \mu_i |h_i| \right]$$

## 基本理论 • XIGA位移形式

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m R_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i$$

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases}$$

## 基本理论 • 标准粒子群算法

粒子群算法，是近年来由J. Kennedy和R. C. Eberhart等开发的一种新的进化算法 (Evolutionary Algorithm - EA)。PSO 算法属于进化算法的一种，和模拟退火算法相似，它也是从随机解出发，通过迭代寻找最优解，它也是通过适应度来评价解的品质，但它比遗传算法规则更为简单，它没有遗传算法的“交叉” (Crossover) 和“变异” (Mutation) 操作，它通过追随当前搜索到的最优值来寻找全局最优。

速度更新公式:

$$V_i^{t+1} = wV_i^t + c_1r_1(P_{best}^t - X_i^t) + c_2r_2(G_{best}^t - X_i^t)$$

位置公式:

$$X_i^{t+1} = X_i^t + V_i^{t+1}$$

其中:

$$w^t = w_s - \frac{(w_s - w_f)t}{T_{\max}}$$

## 基本理论 • 混沌粒子群算法

混沌系统是由非线性确定系统产生的一种随机不规则运动。混沌函数产生的混沌序列，具有不确定性、不可重复性以及不可预测性等特点。因此，在优化算法中引入混沌系统，使其候选解集更具有多样性，从而有效避免陷入局部最优解。混沌函数目前已被发现有很多种，如logistic函数、Ikeda函数、Hénon函数等。。

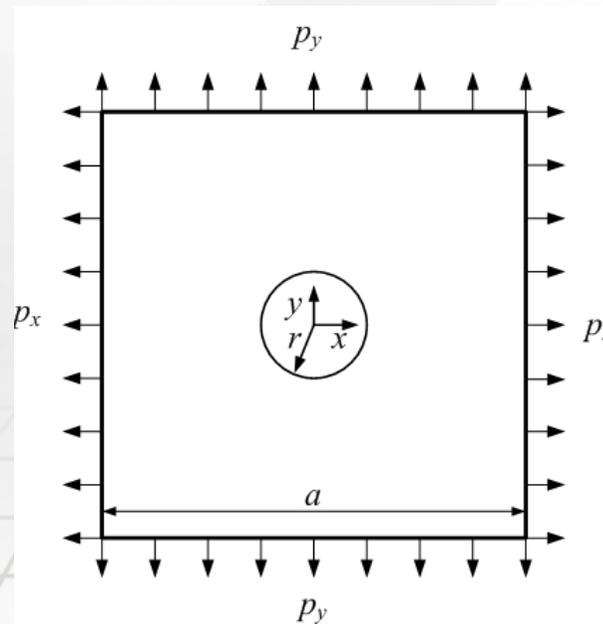
### 选用混沌函数Zaslavskii

$$y_{k+1} = \cos(2\pi u_k) + y_k e^{-3}$$

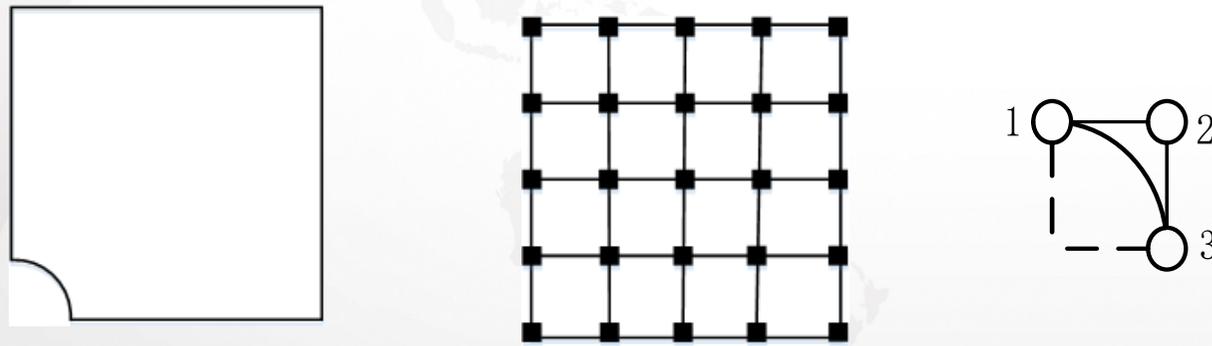
$$u_{k+1} = (u_k + 400 + 12y_{k+1}) \bmod(1)$$

## 算例分析与讨论 • A square plate with one circular hole

The first example deals with a square plate with a hole under biaxial loading as shown in Fig. 1. The width of the plate is  $a=3\text{m}$ , the radius of the hole is  $r=0.2\text{m}$ . The Young's modulus and the Poisson's ratio are  $210\text{MPa}$  and  $0.3$ , respectively. A uniform traction  $p_x=45\text{MPa}$  is applied on the left and right sides, while a uniform traction  $p_y=22.5\text{MPa}$  is applied on the upper and lower sides.

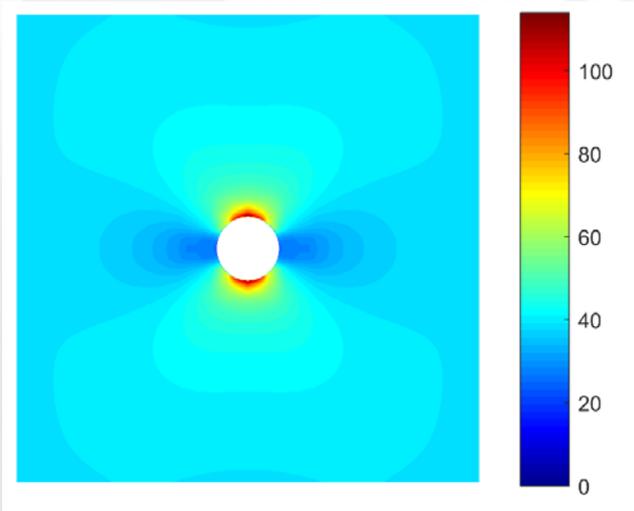


## 算例分析与讨论 • A square plate with one circular hole

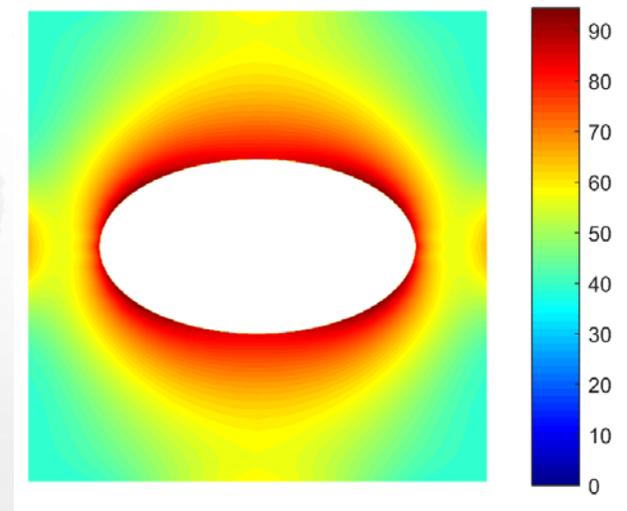


**Fig.2** A square plate with one hole. (a) Computational domain, (b) Mesh, and (c) Description of hole shape.

## 算例分析与讨论 • A square plate with one circular hole

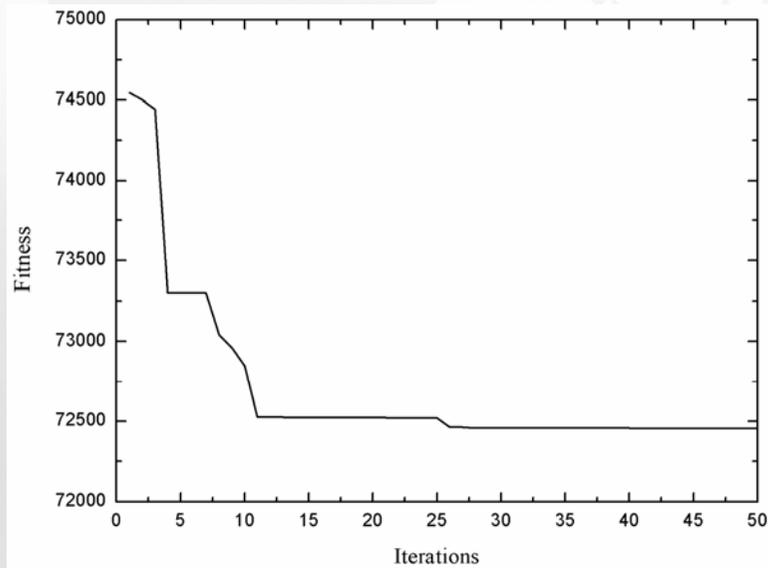


**Fig.3** The distribution of von Mises stress of the initial structure



**Fig.4** The distribution of von Mises stress of the optimized structure

## 算例分析与讨论 • A square plate with one circular hole



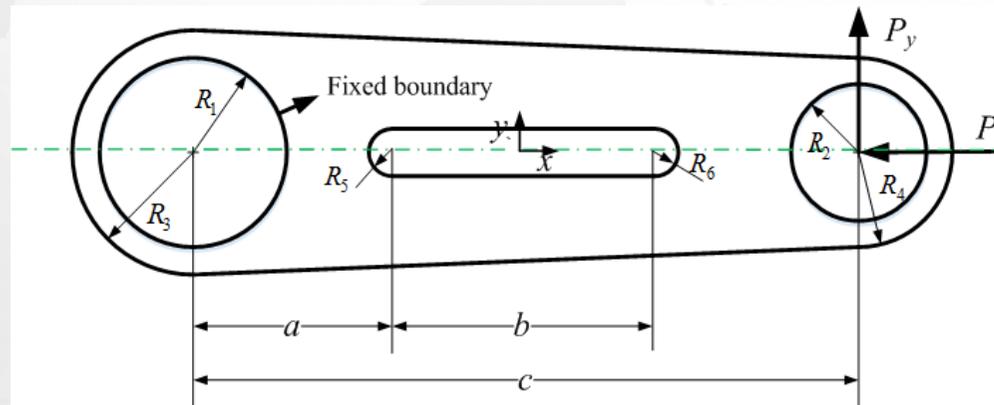
**Fig.5** Iteration process of optimization

**Table 1** Comparison of the solutions by different methods

|        | Theoretical solution [53] | FEM with MMA [25] | XFEM with MMA [25] | The present |
|--------|---------------------------|-------------------|--------------------|-------------|
| K      | 2                         | 1.85              | 1.83               | 1.86        |
| Volume | -                         | -                 | 73850              | 72450       |

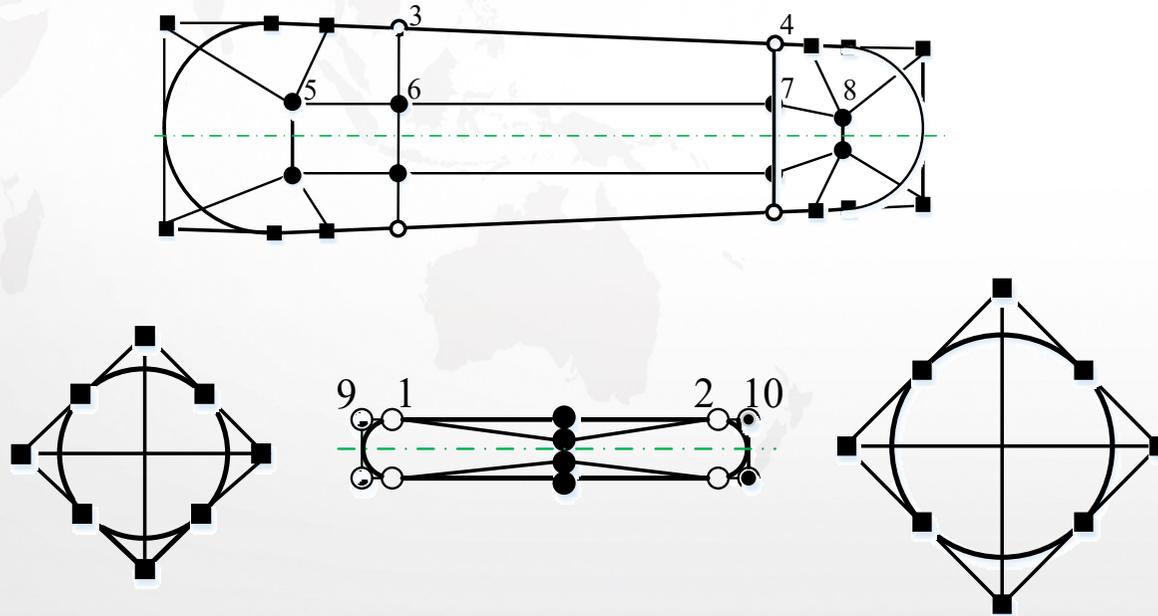
## 算例分析与讨论 • The 2D suspension arm

考虑一个2D的转矩臂算例，其对应的模型尺寸和边界条件如图8所示。转矩臂结构的初始参数为： $R_1=40\text{mm}$ ,  $R_2=25\text{mm}$ ,  $R_3=54.2\text{mm}$ ,  $R_4=42\text{mm}$ ,  $R_5=10\text{mm}$ ,  $R_6=10\text{mm}$ ,  $a=120\text{mm}$ ,  $b=150\text{mm}$ ,  $c=420\text{mm}$ ；转矩臂厚度为3mm。力学边界条件中， $P_x$ 和 $P_y$ 分别为2789N和5066N；杨氏模量和泊松比是207.4GPa和0.3；材料密度为 $7.81 \times 10^{-6}\text{kg/mm}^3$ 。



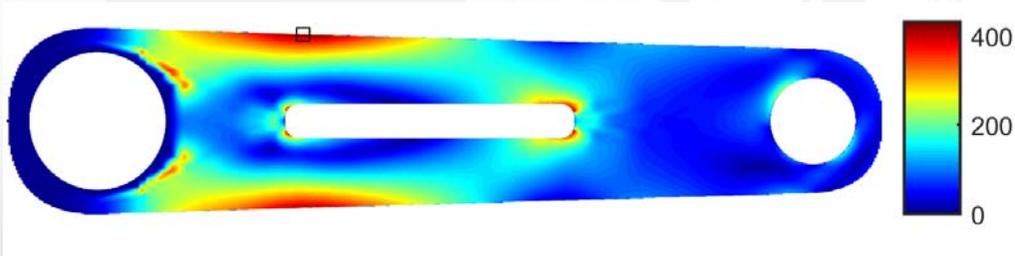
Geometry and load of the 2D suspension arm

# 算例分析与讨论 • The 2D suspension arm

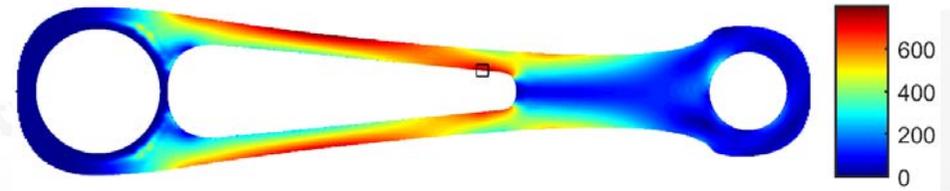


The design model of torque arm structure.

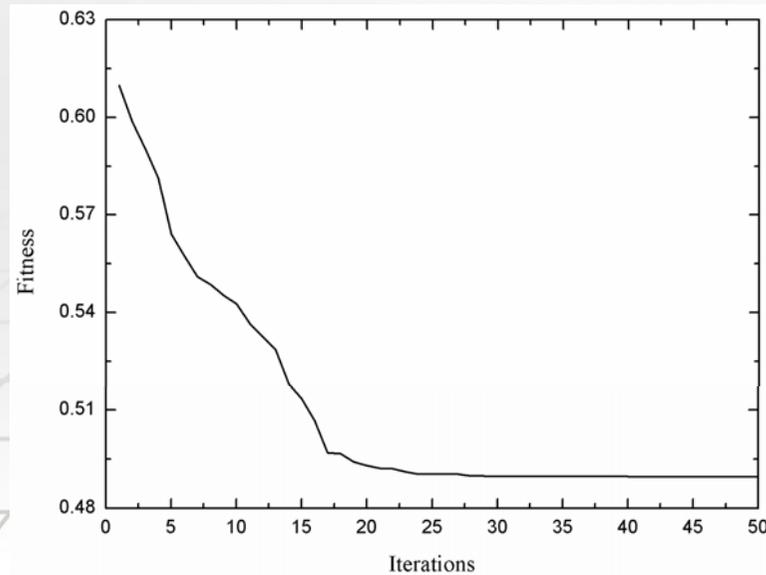
## 算例分析与讨论 • The 2D suspension arm



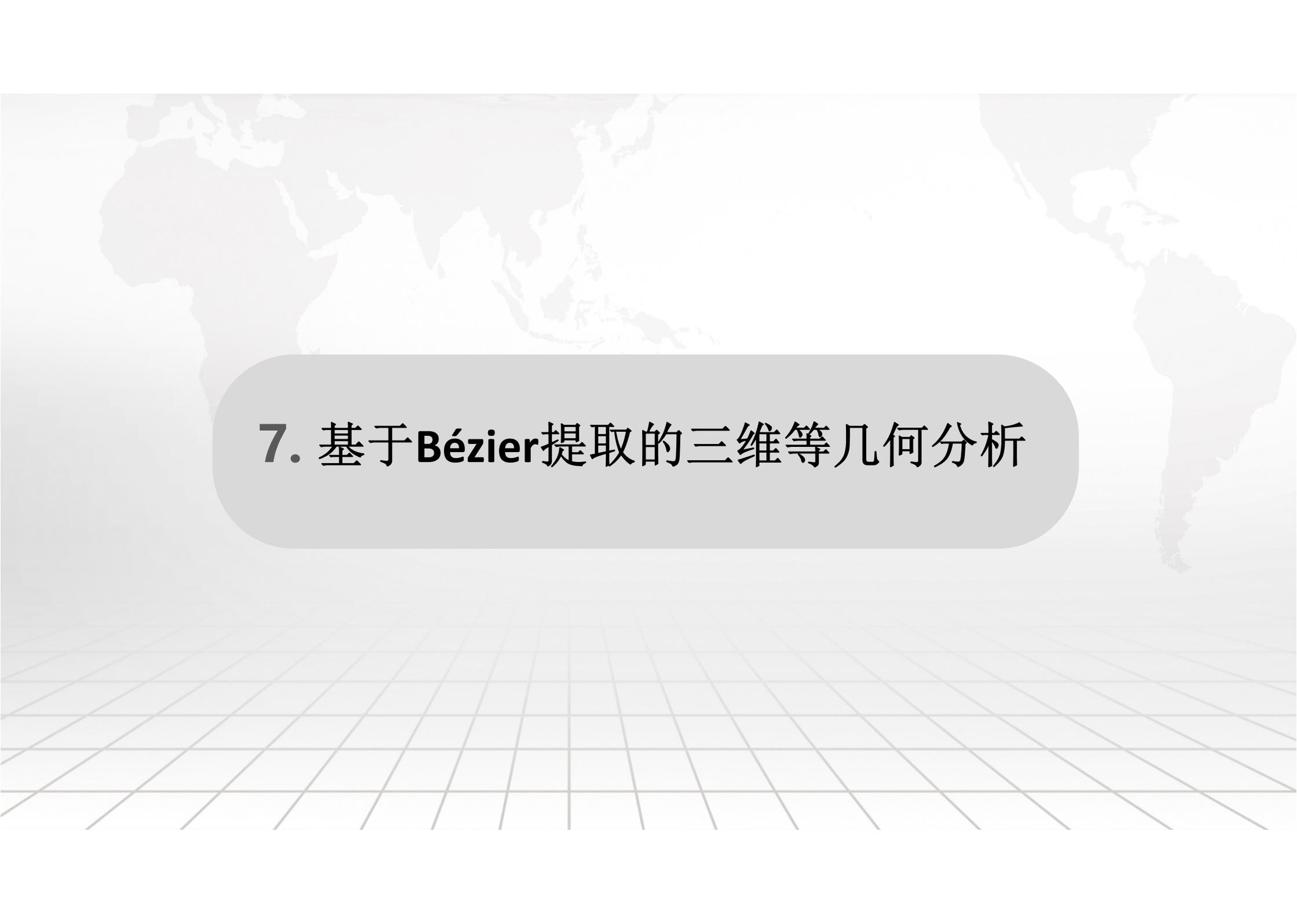
von Mises stress distribution of the initial structure.



von Mises stress distribution of the optimization structure



Iteration process of optimization.

A faint, light gray world map is visible in the background, centered behind the text box. The map shows the outlines of continents and oceans.

## 7. 基于Bézier提取的三维等几何分析

- 
- 等几何分析：形函数跨越若干单元，实现复杂
  - Bézier提取方法可以把NURBS单元分解为 $C^0$ 连续的Bézier单元
  - 基于Bézier提取的IGA可以在现有的FEM程序上实现IGA，只需对形函数加以修改

- Bernstein (伯恩斯坦) 多项式

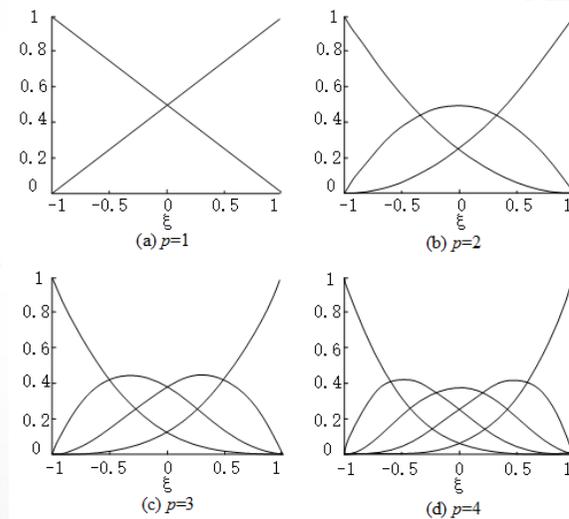
$$B_{i,p}(\xi) = \frac{1}{2} \left( (1-\xi) B_{i,p-1}(\xi) + (1+\xi) B_{i-1,p-1}(\xi) \right)$$

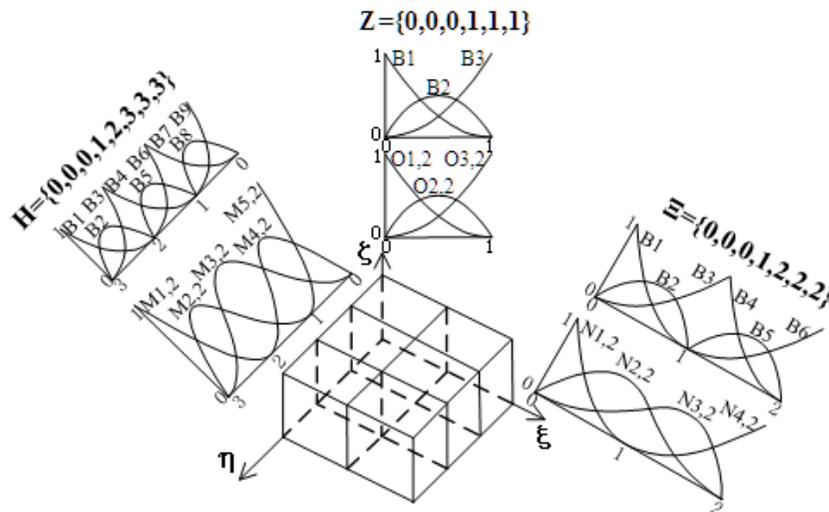
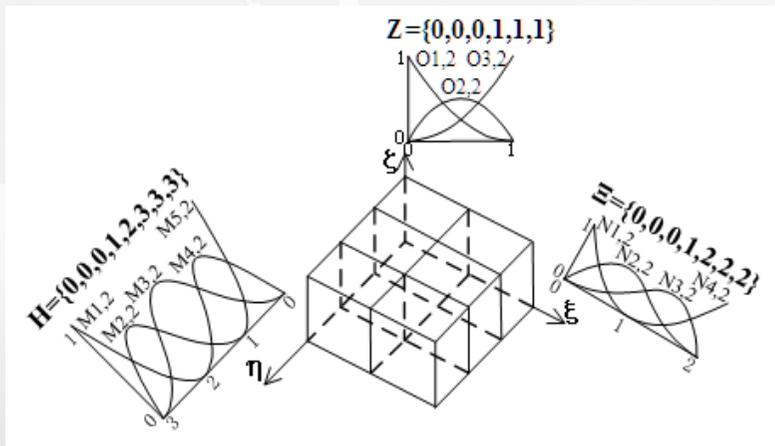
$$\xi \in [-1, 1]$$

- Bézier曲线

Bézier曲线是由Bernstein多项式和控制点的线性组合

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} B_{i,p}(\xi) P_i = \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\xi)$$





通过节点矢量  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$   
 $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$   $Z = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$   
 定义的三维二阶B样条基函数示意图

通过Bézier提取运算从B样条基函数中获得Bézier基函数示意图

二阶B样条基函数进行Bézier提取运算后,原来B样条基函数已经被分解为 $C^0$ 连续的Bézier单元, 并且每个单元都对应于原有节点矢量中独立的一个节点跨度。

- 算例1：厚壁圆筒

内径  $r = 0.5m$

外径  $R = 1m$

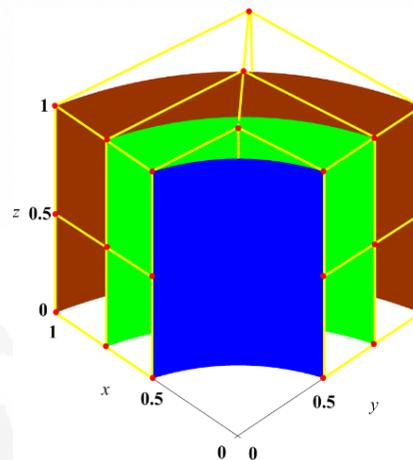
高度  $H = 1m$

内压  $P = 10KPa$

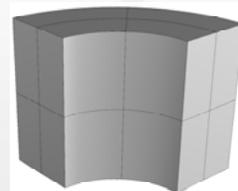
$E = 2.1 \text{ MPa}$

$\nu = 0.3$

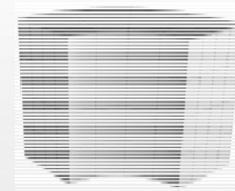
根据对称性，取 1/4 分析



厚壁圆筒控制点



(a)  $2 \times 2 \times 2$  单元



(b)  $4 \times 4 \times 4$  单元

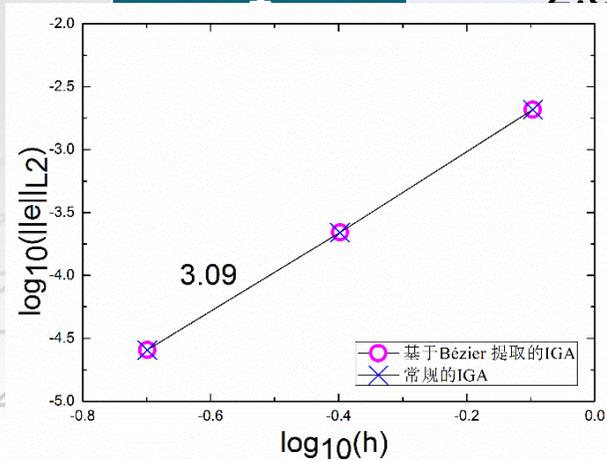


(c)  $8 \times 8 \times 8$  单元

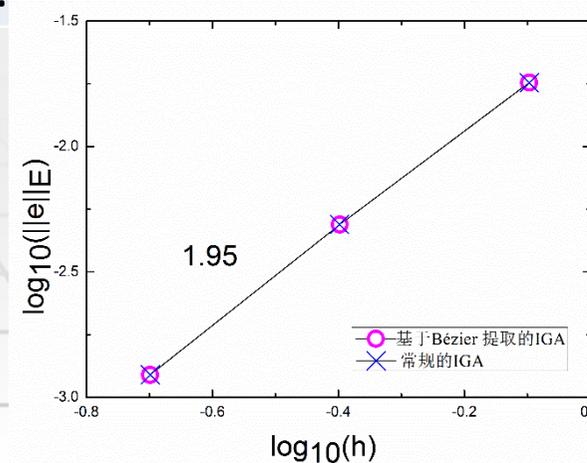
厚壁圆筒单元剖分情况

表 1 厚壁圆筒径向位移

| r (m)  | 本文解(mm) | 解析解(mm) | 误差(%) |
|--------|---------|---------|-------|
| 0.5    | 4.5397  | 4.5396  | 0.021 |
| 0.625  | 3.8187  | 3.8175  | 0.031 |
| 0.75   | 3.3720  | 3.3704  | 0.047 |
| 0.875  | 3.0819  | 3.0805  | 0.045 |
| 0.9375 | 2.9763  | 2.9749  | 0.047 |
| 1      | 2.8901  | 2.8889  | 0.042 |



$L_2$ 范数  
误差收敛率比较



能量范数  
误差收敛率比较

- 算例2：空心厚壁圆球

内径  $r = 0.5m$

外径  $R = 1m$

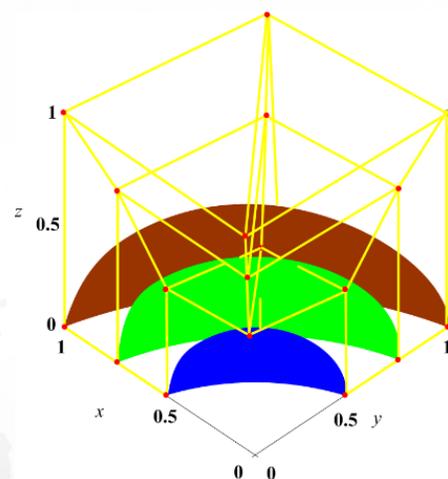
内壁受压  $P_1 = 10KPa$

外壁受压  $P_2 = 10KPa$

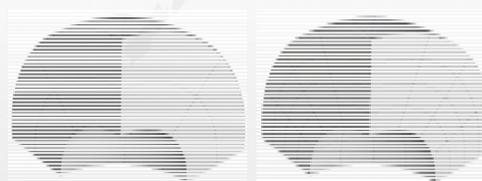
$E = 2.1 \text{ MPa}$

$\nu = 0.3$

根据对称性, 取 1/8 分析



空心厚壁圆球控制点



(a)  $2 \times 2 \times 2$  单元

(b)  $4 \times 4 \times 4$  单元

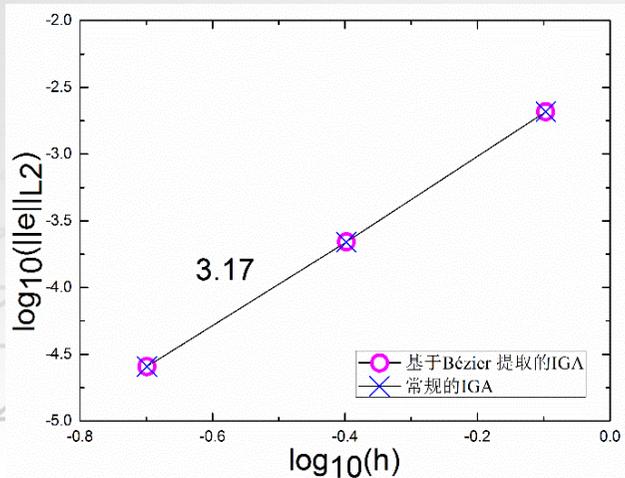


(c)  $8 \times 8 \times 8$  单元

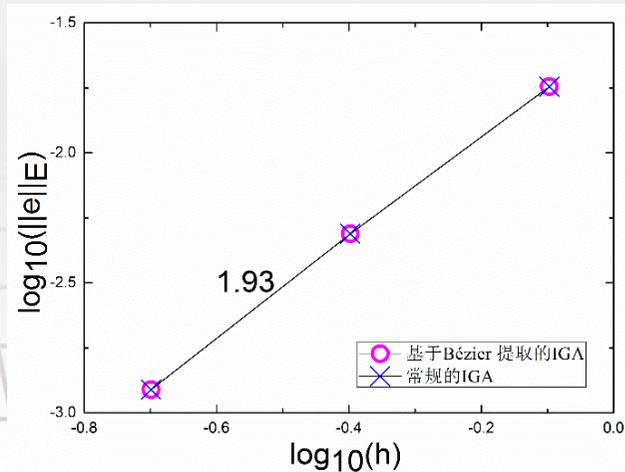
空心厚壁圆球单元剖分情况

# 空心厚壁圆球的径向位移

| r (m)  | 本文解(mm) | 解析解(mm) | 误差(%) |
|--------|---------|---------|-------|
| 0.5    | -3.8087 | -3.8095 | 0.021 |
| 0.625  | -3.6811 | -3.6830 | 0.052 |
| 0.75   | -3.8469 | -3.8473 | 0.010 |
| 0.875  | -4.1486 | -4.1490 | 0.010 |
| 0.9375 | -4.3295 | -4.3296 | 0.002 |
| 1      | -4.5236 | -4.5238 | 0.004 |



L<sub>2</sub>范数误差收敛率比较



能量范数误差收敛率比较

## 基于Bézier提取的三维弹塑性小变形等几何分析

- 小变形弹塑性问题基本方程

$$\text{应变场: } \varepsilon_i = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

应变增量:

$$d\varepsilon_i = d\varepsilon_i^e + d\varepsilon_i^p$$

弹性应变增量

塑性应变增量

弹性矩阵

$$\text{本构关系: } d\sigma_{ij} = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)$$

$$\text{平衡方程的弱形式: } \int_{\Omega} \varepsilon(v) : D : \varepsilon(u) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{S_c} \bar{t} \cdot v dS$$

$$\text{Bézier提取后的位移场: } u^h = \sum_{i=1}^{NP} R_i(\xi, \eta, \zeta) u_i$$

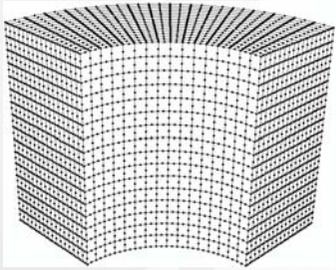
$NP = (p+1)(q+1)(r+1)$   
是每个单元的控制点数量

$$\text{离散方程: } K\delta = F$$

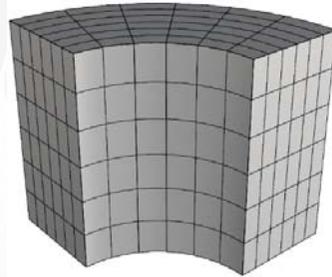
通过欧拉-牛顿法求解非线性方程组

$$B_i = \begin{bmatrix} R_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,z} \\ R_{i,x} & R_{i,y} & 0 \\ 0 & R_{i,x} & R_{i,y} \\ R_{i,x} & 0 & R_{i,z} \end{bmatrix}$$

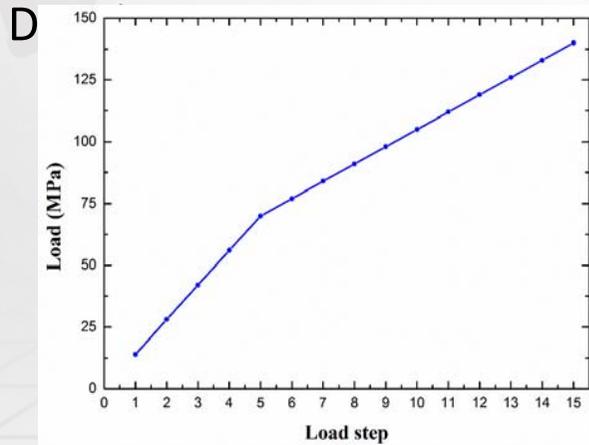
- 算例1: 受内压厚壁圆筒



FEM(56355)



IGA(1536 DOFs)



荷载施加示意图

von Mises 屈服准则

$$E=2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$$

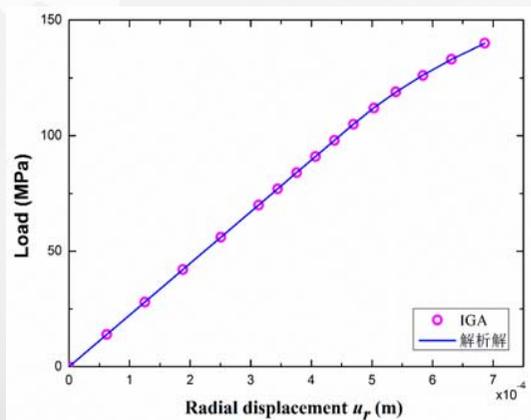
$$\nu = 0.3 ,$$

$$\sigma_s^0 = 240 \text{ MPa}$$

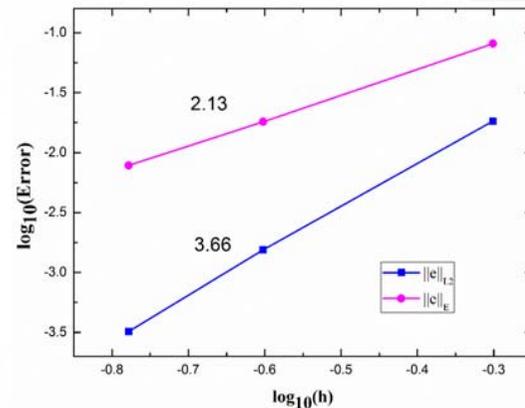
$$H = 0$$

分级加载

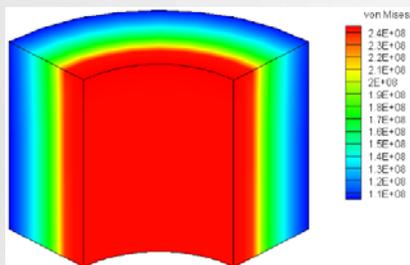
$$R_{MAX} = 140 \text{ MPa}$$



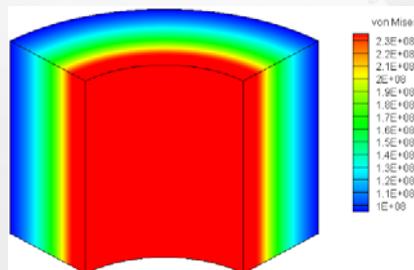
荷载作用下内壁处径向位移



本文方法L2范数误差和能量范数收敛率

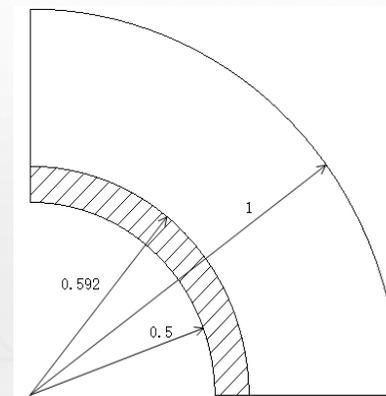


FEM

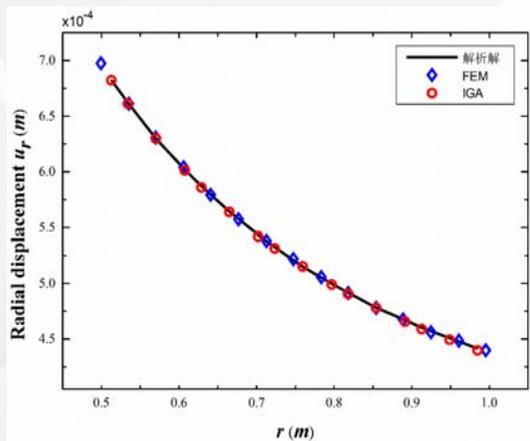


IGA

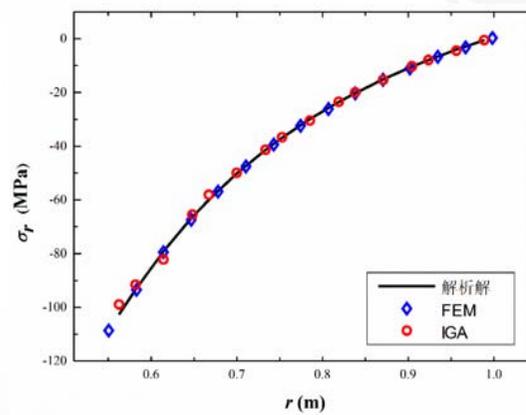
厚壁圆筒von Mises 应力云图示意图



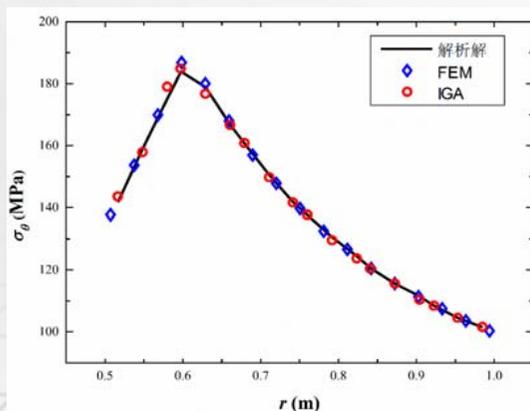
厚壁圆筒屈服区示意图  
解析解求得弹塑性界面半径为0.603



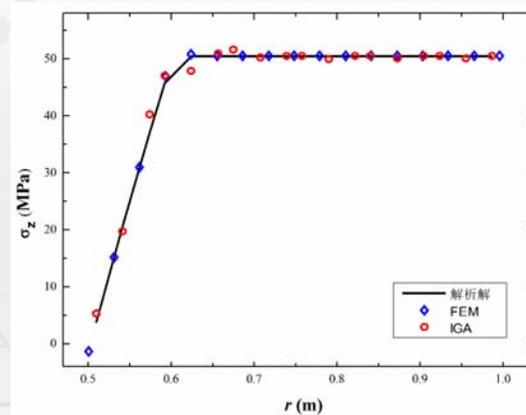
厚度方向径向位移示意图



径向应力

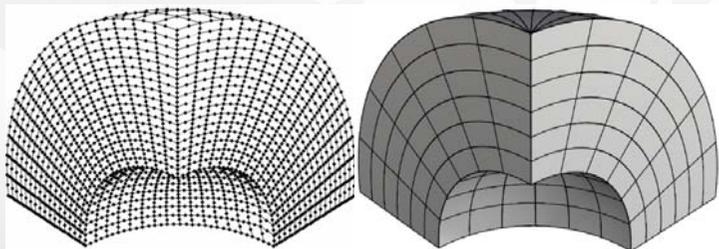


切向应力



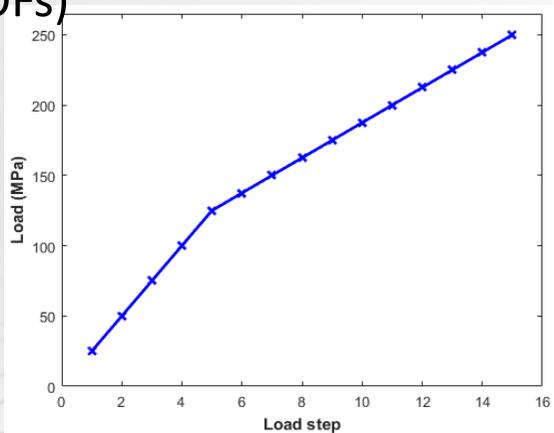
轴向应力

- 算例2：受内压厚壁圆球

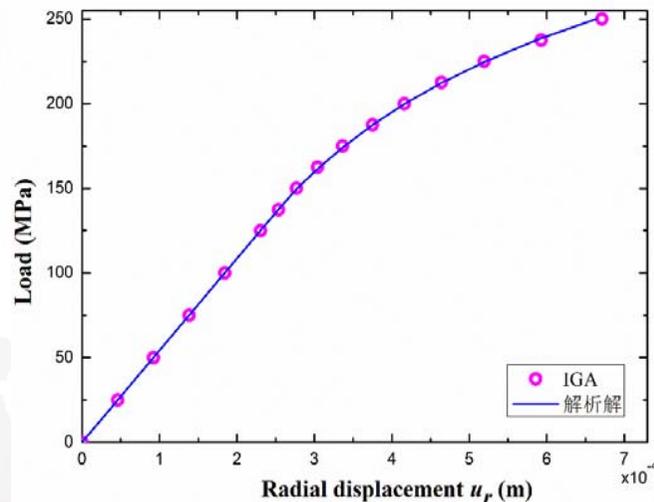


FEM(42291 DOFs)

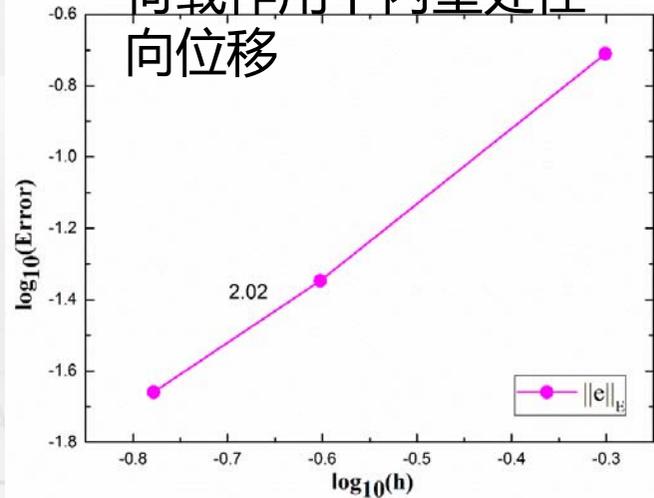
IGA(1536 DOFs)



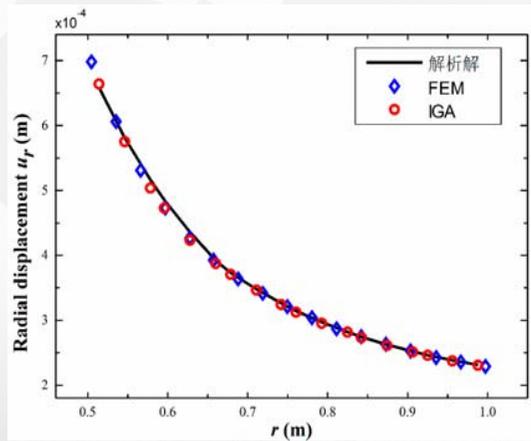
荷载施加示意图



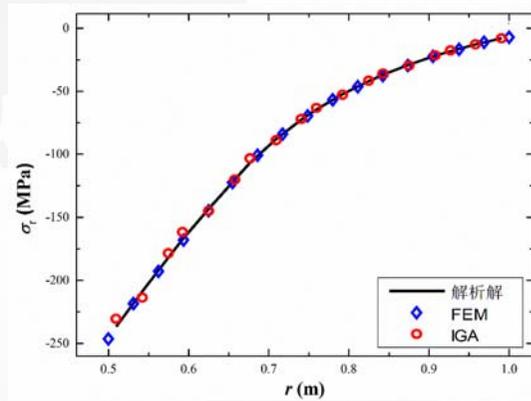
荷载作用下内壁处径向位移



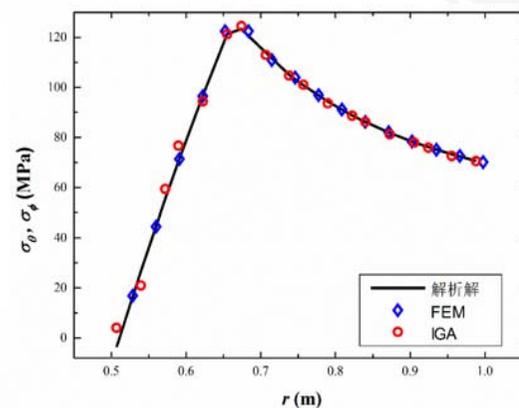
能量范数误差收敛率



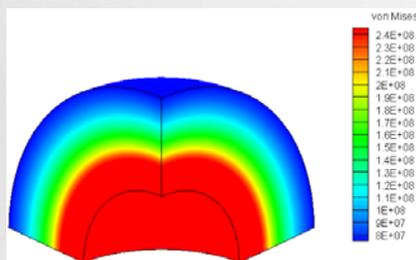
厚度方向径向位移



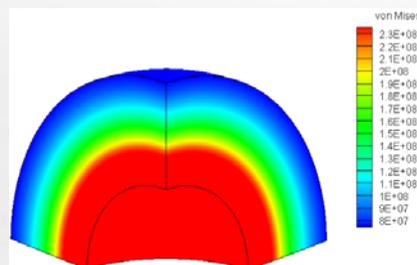
径向应力



切向应力

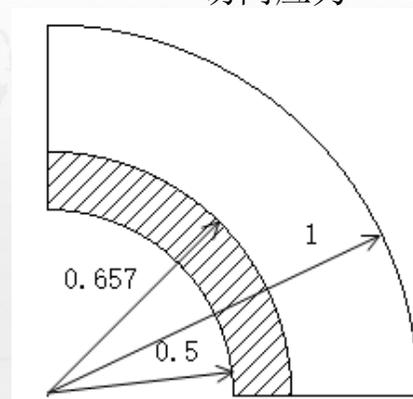


FEM



IGA

空心厚壁圆球von Mises 应力云图示意图



空心厚壁圆球屈服区示意图  
解析解求得弹塑性界面半径为0.665

- 算例3：受内压作用带弯头圆管

内径  $a = 0.5 \text{ m}$

外径  $b = 1 \text{ m}$

von Mises 屈服准则

$E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$

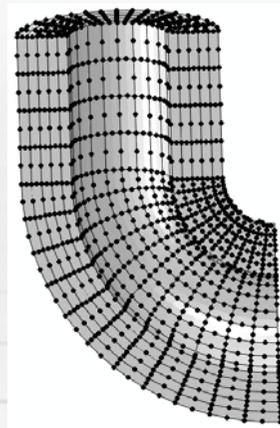
$\nu = 0.3$ ,

$\sigma_s^0 = 240 \text{ MPa}$

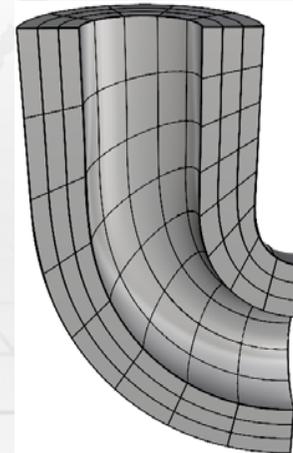
$H = 0$

分级加载

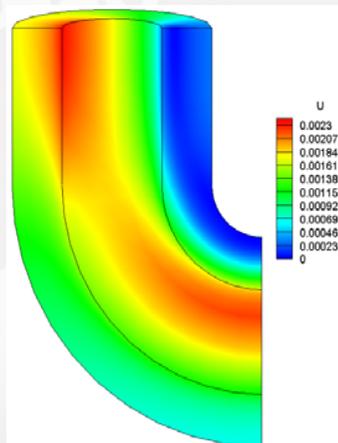
$R_{MAX} = 140 \text{ MPa}$



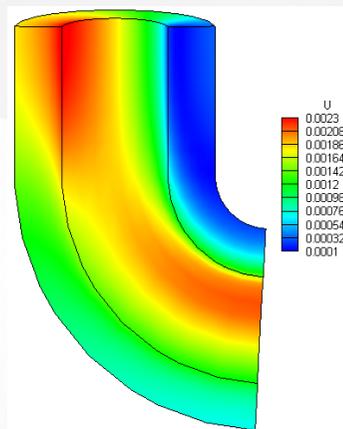
FEM(11658  
DOFs)



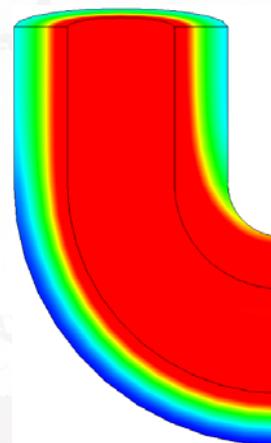
IGA(1050 DOFs)



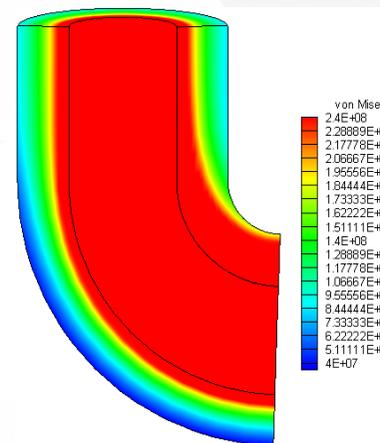
FEM



IGA



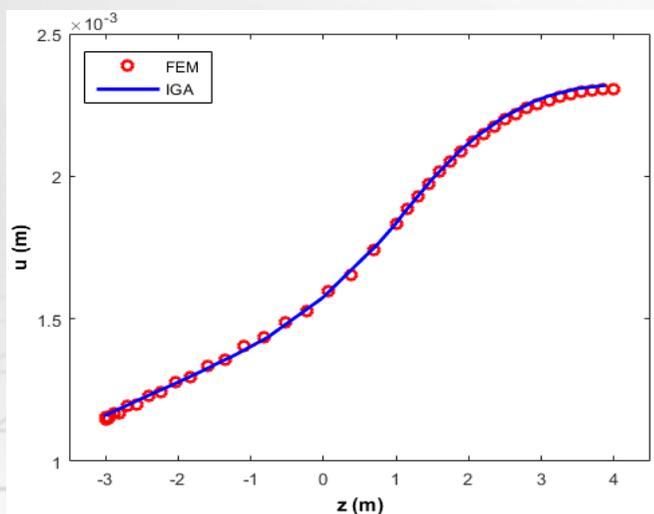
FEM



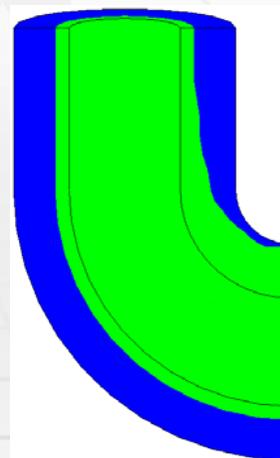
IGA

弯管von Mises 应力云图比较

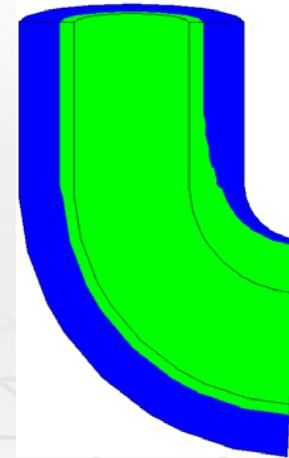
$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$



左内边界上位移分布示意图



FEM



IGA

弯管屈服区云图比较

## 基于Bézier提取的三维弹塑性大变形等几何分析

- 大变形弹塑性问题基本方程（完全拉格朗日形式）

$T_m$ 时刻格林应变:  $E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$

$T_{m+1}$ 时刻格林应变:  $\bar{E}_{ij} = E_{ij} + \Delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (u_j + \Delta u_j)}{\partial X_i} + \frac{\partial (u_i + \Delta u_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial (u_k + \Delta u_k)}{\partial X_i} \frac{\partial (u_k + \Delta u_k)}{\partial X_j} \right)$

应变增量:  $\Delta E_{ij} = \Delta E_{ij0}^L + \Delta E_{ij1}^L + \Delta E_{ij}^N$      $\delta(\Delta E) = B \delta(\Delta u^e)$      $B = B_{L0} + B_{L1} + B_N$

形式上和小变形问题中应变矩阵相同

线性部分增量应变位移效应

非线性部分增量应变位移效应

增量形式平衡方程:  $\psi(\Delta u^e) = \int_{V_0} B^T \Delta S dV + \int_{V_0} B_N^T S dV + \int_{V_0} (B_{L0}^T + B_{L1}^T) S dV - \bar{F}_0 = 0$

外力荷载

线性化：1、 $B_{L0} + B_{L1}$  代替  $B$  实现应变-位移矩阵线性化

2、 $dS = D_T dE$  代替  $\Delta S = \int_E^{E+\Delta E} D_T dE$  实现有限的应力-应变线性化

$T_m$  时刻弹塑性荷载

$$\int_{V_0} B^T \Delta S dV = \int_{V_0} B^T D \Delta E dV \approx \left( \int_{V_0} (B_{L0}^T + B_{L1}^T) D_T (B_{L0} + B_{L1}) dV_0 \right) \Delta u^e = K_L \Delta u$$

线性应变增量刚度矩阵

$$\int_{V_0} B_N^T S dV = \left( \int_{V_0} G^T M G dV_0 \right) \Delta u^e = \left( \int_{V_0} \bar{G}^T \bar{M} \bar{G} dV_0 \right) \Delta u^e = K_s \Delta u$$

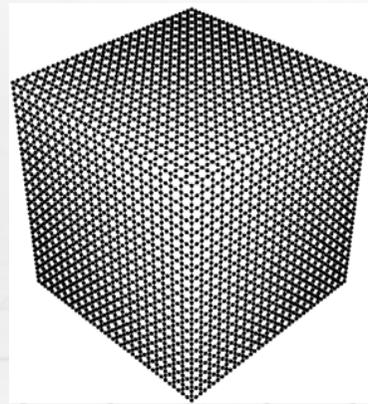
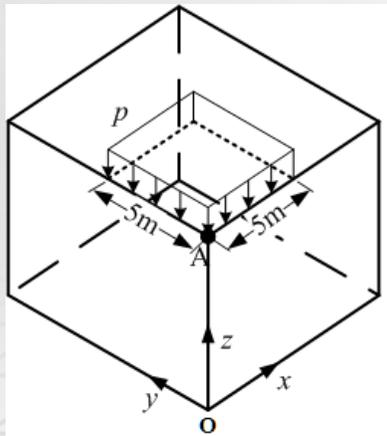
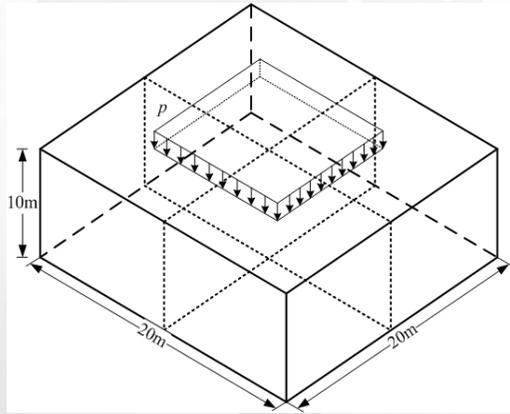
非线性应变增量刚度矩阵

求解的平衡方程： $(K_s + K_L) \Delta u = \bar{F}_0 - F_s$

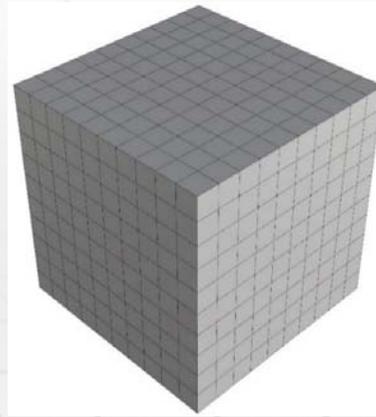
等效节点力矢量

通过欧拉-牛顿法求解平衡方程

• 算例1：局部受压弹塑性块体



FEM  $20 \times 20 \times 20$



IGA  $10 \times 10 \times 10$

von Mises 屈服准则

$$E=6900 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3 ,$$

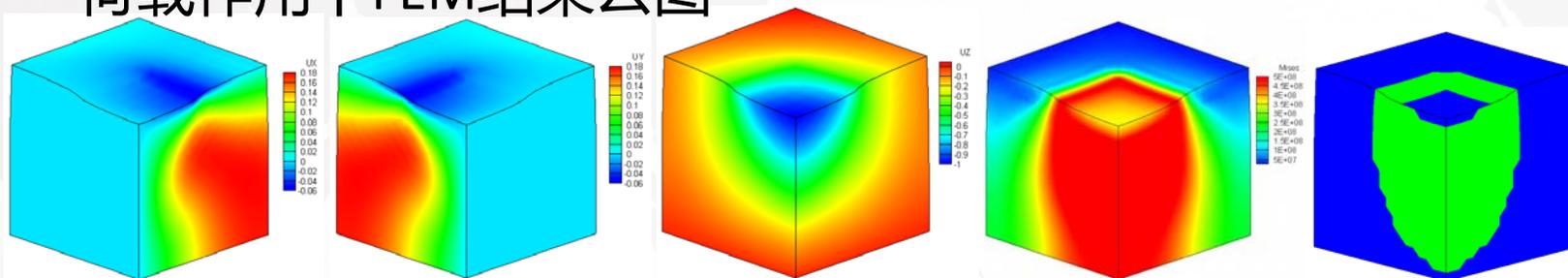
$$\sigma_s^0 = 500 \text{ MPa}$$

$$H = 0$$

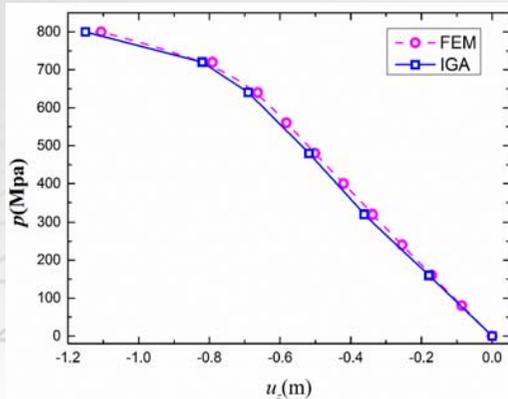
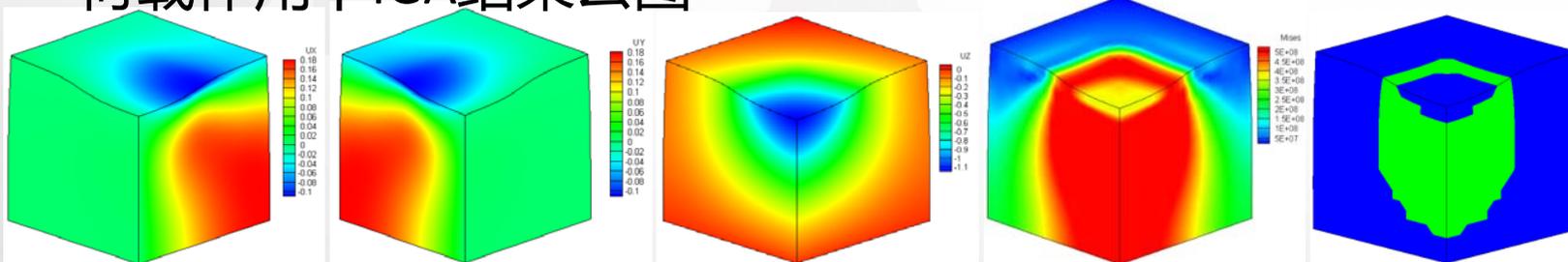
分级加载

$$R_{MAX} = 800 \text{ MPa}$$

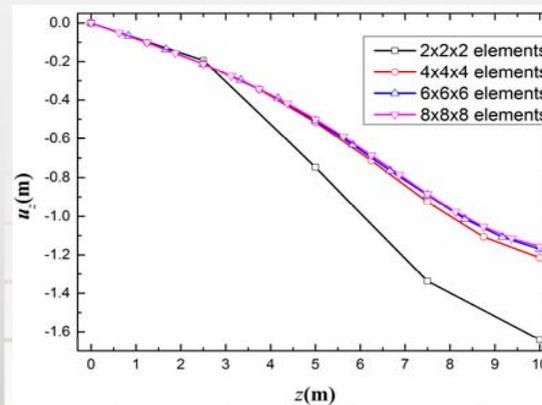
## 荷载作用下FEM结果云图



## 荷载作用下IGA结果云图



A点 z  
方向位  
移随荷  
载变化  
示意图



不同网格  
剖分时块  
体OA边  
界上z方  
向位移变  
化情况

• 算例2：三维弯曲梁

内径  $a=0.8\text{m}$

外径  $b=1\text{m}$

梁高  $L=1\text{m}$

von Mises 屈服准则

$E=2.1\times 10^5 \text{ MPa}$

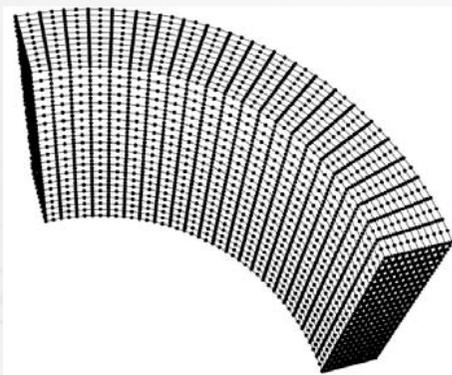
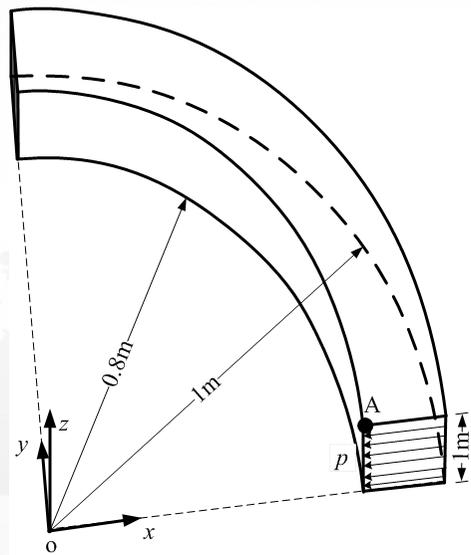
$\nu = 0.3$ ,

$\sigma_s^0 = 440 \text{ MPa}$

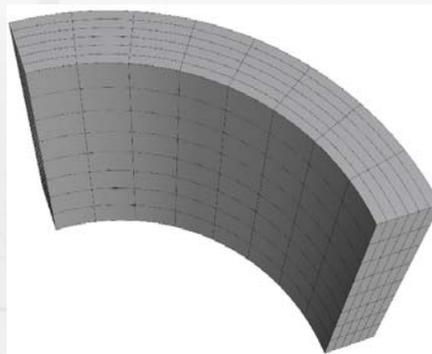
$H = 0$

分级加载

$R_{MAX} = 49\text{MPa}$

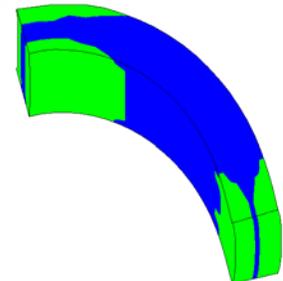
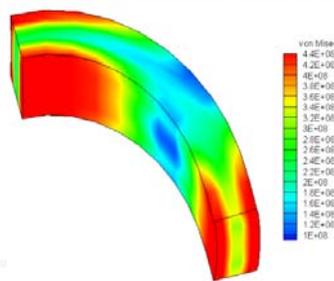
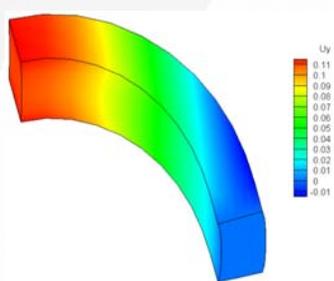
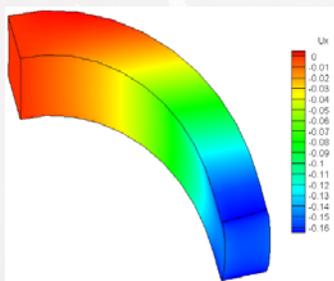


FEM  $20\times 10\times 20$

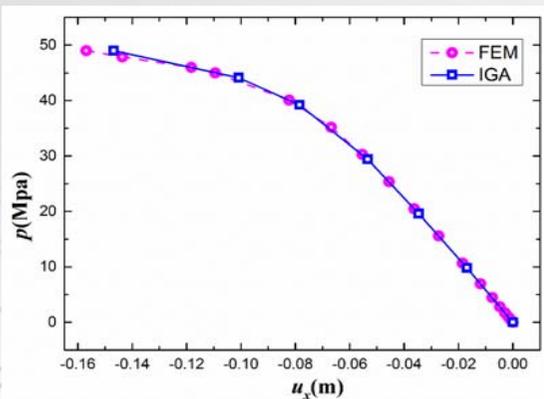
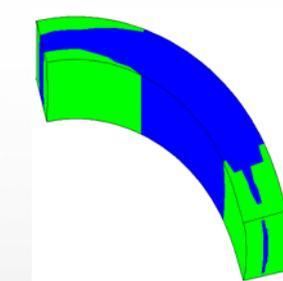
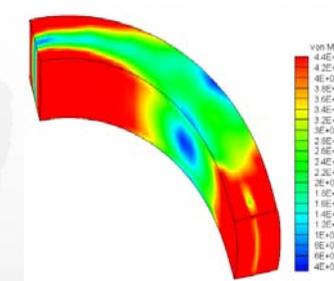
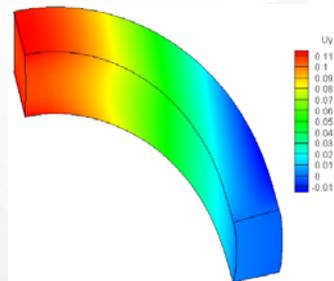
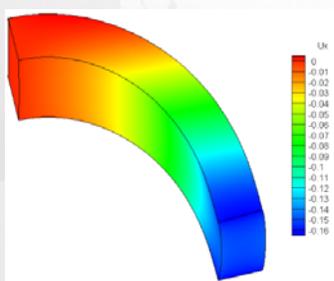


IGA  $8\times 6\times 8$

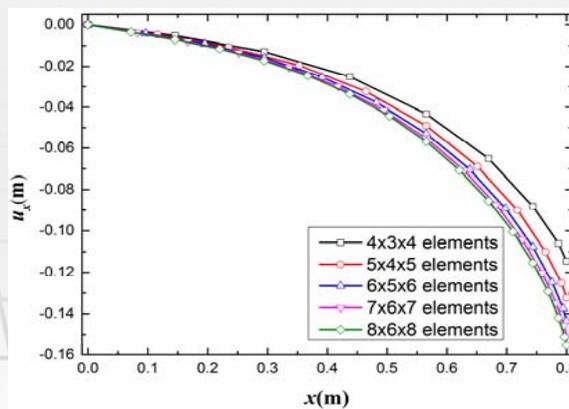
荷载作用下 FEM 结果云图



荷载作用下 IGA 结果云图



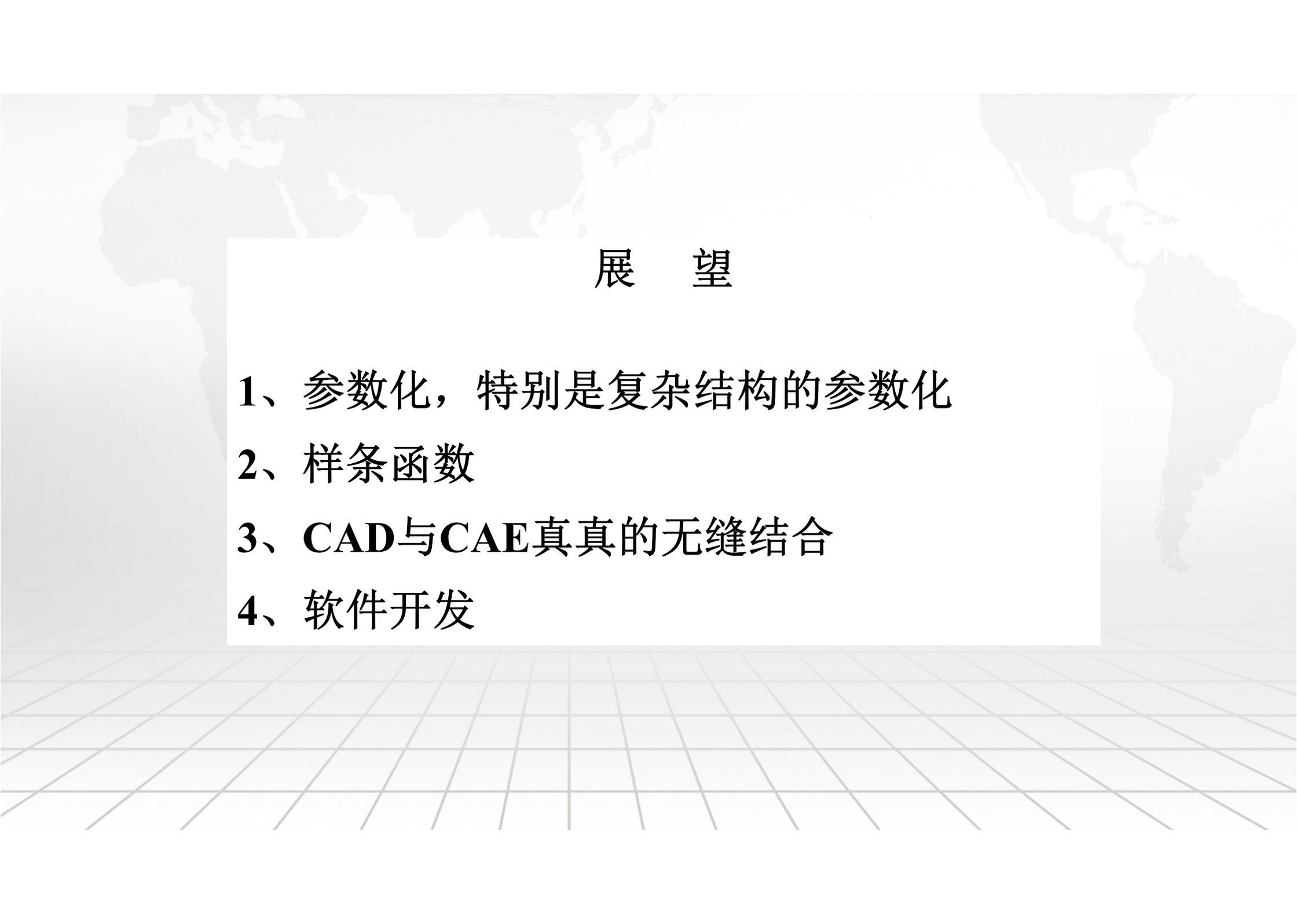
A点 x 方向位移随荷载变化示意图



不同网格剖分情况下弯曲梁内壁底边上x方向位移变化情况

- [1]. Shuohui Yin, Jack S. Hale, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Stéphane P.A. Bordas. Isogeometric locking-free plate element: a simple first order shear deformation theory for functionally graded plates. *Composite Structures*,2014,118:121-138.
- [2]. Minh Ngoc Nguyen, Tinh Quoc Bui, Tiantang Yu, Sohichi Hirose. Isogeometric analysis for unsaturated flow problems. *Computers and Geotechnics*, 2014, 62:257-267.
- [3]. Tiantang Yu, Shuohui Yin, Tinh Quoc Bui, Sohichi Hirose. A simple FSDT-based isogeometric analysis for geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design*,2015,96:1-10
- [4]. Shuohui Yin, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Shifeng Xia, Sohichi Hirose. A Cutout Isogeometric Analysis for Thin Laminated Composite Plates using Level Sets. *Composite Structures*,2015,127:152-164.
- [5]. Shuohui Yin, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Minh Ngoc Nguyen. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using isogeometric analysis. *Engineering Computations*, 2015,32(2):519-558.
- [6]. Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Shuohui Yin, Thom Van Do, Satoyuki Tanaka, Duc Hong Doan. On the thermal buckling analysis of functionally graded plates with internal defects using extended isogeometric analysis. *Composite Structures* 2016,136:684-695.
- [7]. Tiantang Yu, Shuohui Yin, Tinh Quoc Bui, Shifeng Xia, Satoyuki Tanaka, Sohichi Hirose. NURBS-based isogeometric analysis of buckling and free vibration problems for laminated composites plates with complicated cutouts using a new simple FSDT theory and level set method. *Thin-walled structures* 2016,101:141-156.
- [8]. Shuohui Yin, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Peng Liu, Sohichi Hirose. Buckling and vibration extended isogeometric analysis of imperfect graded Reissner-Mindlin plates with internal defects using NURBS and level sets. *Computers and Structures* 2016,177:23-38.

- [9]. Shuohui Yin, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Xuejun Zheng, Satoyuki Tanaka. In-plane material inhomogeneity of functionally graded plates: A higher-order shear deformation plate isogeometric analysis. *Composites Part B: Engineering* 2016,106:273-284.
- [10].Tiantang Yu, Shuohui Yin, Tinh Quoc Bui, Chen Liu, Nuttawit Wattanasakulpong. Buckling isogeometric analysis of functionally graded plates under combined thermal and mechanical loads. *Composite Structures* 2017;162:54-69.
- [11]. Wenjiang Lai, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Zhiguo Wang, Jose L. Curiel-Sosa, Raj Das, Sohichi Hirose. 3-D elastoplastic large deformations: IGA simulation by Bézier extraction of NURBS. *Advances in Engineering Software* 2017, 108:68-82.
- [12] Shuo Liu, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Shifeng Xia. Size-dependent analysis of homogeneous and functionally graded microplates using IGA and a non-classical Kirchhoff plate theory. *Composite Structures* 2017, .
- [13]. Shuo Liu, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Shuohui Yin, Duc-Kien Thai, Satoyuki Tanaka. Analysis of functionally graded plates by a simple locking-free quasi-3D hyperbolic plate isogeometric method. *Composites Part B: Engineering* 2017,120:182-196.
- [14]. Shuohui Yin, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Xuejun Zheng, Gao Yi. Rotation-free isogeometric analysis of functionally graded thin plates considering in-plane material inhomogeneity. *Thin-walled structure* 2017,119:385-395
- [15].Shuo Liu, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui. Size effects of functionally graded microplates: A novel non-classical simple-FSDT isogeometric analysis. *European journal of mechanics - a/solids* 2017,66:446-458.
- [16]. Zhilin An, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Chao Wang, Duc Hong Doan. Implementation of isogeometric boundary element method for 2-D steady heat transfer analysis. *Advances in Engineering Software* 2018,116:36-49.
- [17]. S.H. Sun, T.T Yu, Thanh Tung Nguyen, Elena Atroshchenko, T.Q. Bui. Structural shape optimization by IGABEM and particle swarm optimization algorithm. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2018;88:26-40.
- [18]. Tiantang Yu, Wenjiang Lai, Tinh Quoc Bui. IGA-3D elastoplastic simulation based on Bézier extraction of NURBS. *International Journal of Mechanics and Materials in Design* 2018,DOI:10.1007/s10999-018-9405-x.

A faint, light gray world map is visible in the background of the slide, centered behind the text.

## 展 望

- 1、参数化，特别是复杂结构的参数化
- 2、样条函数
- 3、**CAD**与**CAE**真真的无缝结合
- 4、软件开发